

Partie I - Définition d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

I.A -

- Si $A_1 A_2 A_3$ fait partie de la configuration voulue alors il ne reste plus qu'à configurer le quadrilatère restant $A_1 A_3 A_4 A_5$ lequel est du ressort du cas $n = 4$. Il y a donc bien 2 façons de faire.
- Si $A_1 A_2 A_4$ fait partie de la configuration alors les triangles $A_2 A_3 A_4$ et $A_1 A_4 A_5$ qui sont ainsi formés ne peuvent plus être partagés donc la configuration est terminée. Il n'y a qu'une façon de faire.
- Si $A_1 A_2 A_5$ est dans la configuration souhaitée alors il ne reste plus qu'à s'occuper du quadrilatère restant, à savoir $A_2 A_3 A_4 A_5$, et donc comme dans le premier cas il y a 2 façons de faire.

Le segment $[A_1 A_2]$ doit, dans chaque configuration possible, faire partie d'un seul triangle dont le troisième sommet est à choisir parmi A_3, A_4, A_5 . Les trois cas envisagés ci-dessus conduisent donc à toutes les possibilités (on n'a pas omis de solution). De plus si on change de cas les configurations obtenues diffèrent en ce que le segment $[A_1 A_2]$ a changé de triangle (on a pas compté deux fois la même configuration). Ainsi $a_5 = 2 + 1 + 2 = 5$. C.Q.F.D.

I.B -

- Si $A_1 A_2 A_3$ est dans la configuration alors il ne reste plus qu'à configurer le pentagone $A_1 A_3 A_4 A_5 A_6$.

Dans le cas $n = 6$, $A_1 A_2 A_3$ fait partie de $a_5 = 5$ configurations
- Si $A_1 A_2 A_4$ est dans la configuration alors il ne reste plus qu'à configurer le quadrilatère $A_1 A_4 A_5 A_6$.

Dans le cas $n = 6$, $A_1 A_2 A_4$ fait partie de $a_4 = 2$ configurations
- Si $A_1 A_2 A_5$ est dans la configuration alors il ne reste plus qu'à configurer le quadrilatère $A_2 A_3 A_4 A_5$.

Dans le cas $n = 6$, $A_1 A_2 A_5$ fait partie de $a_4 = 2$ configurations
- Si $A_1 A_2 A_6$ est dans la configuration alors il ne reste plus qu'à configurer le pentagone $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

Dans le cas $n = 6$, $A_1 A_2 A_6$ fait partie de $a_5 = 5$ configurations

Là aussi, comme dans le cas $n = 5$, on a épuisé toutes les possibilités et elles sont toutes distinctes.

On peut donc conclure

$a_6 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$

.

I.C -

Le raisonnement est identique à celui des **I.A** - et **I.B** - à ceci près que dans le troisième cas, celui où le segment $[A_1 A_2]$ fait partie du triangle $A_1 A_2 A_5$, il faut ensuite partager le quadrilatère $A_2 A_3 A_4 A_5$ et aussi le quadrilatère $A_1 A_5 A_6 A_7$ et chaque partage du premier peut donner lieu à autant de configurations que de partage du second. Cela donne donc $a_4 a_4$ façons de faire dans ce cas.

Par contre le raisonnement peut être absolument identique pour le calcul de a_8 et donc (à mon avis) l'énoncé est trop directif. (Si le candidat n'a pas compris le cas $n = 7$ alors il ne comprendra certainement aucun autre cas pour n supérieur à 6 !)

I.D -

R.A.S. Par un raisonnement généralisant celui du calcul de a_7 on trouve

Pour n dans $\llbracket 7, +\infty \rrbracket$, $a_n = a_{n-1} a_{n-2} + \left(\sum_{j=5}^{n-2} a_{j-1} a_{n+2-j} \right) + a_{n-2} + a_{n-1}$

I.E -

R.A.S. Il suffit de faire le décalage d'indice $j = k + 1$ pour les cas $n \geq 7$ et de contrôler par un calcul explicite les cas particuliers $n \leftarrow 3, n \leftarrow 4, n \leftarrow 5, n \leftarrow 6$.

I.F -

Langage utilisé ici : MATHEMATICA (version 2.2 et plus)

(* La définition des a_n étant récurrente on a fortement (du moins en pratique) à utiliser une fonction à mémoire . *)

$a[2] = 1 ; a[3] = 1 ;$

$a[n_Integer] := a[n] = \text{Sum}[a[k] * a[n+1-k], \{k, 2, n-1\}] / ; n \geq 2 ;$

Résultat[n_] := Table[a[k], {k, 2, n}]

(* On suppose qu'ensuite l'utilisateur tapera « Résultat[n] » pour une valeur de n à choisir . *)

Partie II - Expression de a_n **II.A -**

R.A.S. Le résultat s'obtient en séparant les deux derniers termes de $\sum_{k=2}^{n+1} a_k a_{n+1-k}$ et en constatant qu'ils sont nuls

(vus les choix de a_0 et de a_1).

REMARQUE : l'expression $\sum_{k=2}^{n+1} a_k a_{n+1-k}$ a un sens dès que $n \geq 1$ et donne un résultat correct pour le cas $n = 1$

mais faux hélas dans le cas $n = 2$. On comprend la prudence de l'énoncé !

II.B -**II.B - 1)**

Considérons la série entière $\sum c_n x^n$ définie par $c_n = b_{m+n}$ si $n \geq 1$ et par $c_1 = 0$.

h apparaît comme la fonction somme de cette série entière et on observe que

$$\forall x \in]-r, r[\setminus \{0\}, h(x) = \frac{1}{x^m} \sum_{n=1}^{+\infty} b_{m+n} x^{m+n} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} b_k x^k = \frac{1}{x^m} (g(x) - \sum_{k=0}^m b_k x^k)$$

car g est définie sur $] -r, r[$. Donc h est définie sur $] -r, r[\setminus \{0\}$ donc le rayon de convergence de la série

entière $\sum c_n x^n$ vaut au minimum r et donc sa somme h est (en tant que somme de série entière) de classe C^∞ (

donc à fortiori C^0) sur $] -r, r[$. C.Q.F.D.

II.B - 2)

On a déjà $\forall x \in] -r, r[\setminus \{0\}, g(x) = x^m h(x) + \sum_{k=0}^m b_k x^k$ (voir question précédente) .

On observe que , grâce à la convention usuelle ($x^0 = 1$ même lorsque $x = 0$) , cette égalité reste vraie en 0 . Par ailleurs , puisque h est continue en 0 , $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 0$. Ceci signifie que

$$g \text{ possède un Développement Limité à l'ordre } m \text{ en } 0 \text{ dont la partie régulière est } \sum_{k=0}^m b_k x^k .$$

II.B - 3)

R.A.S. Le théorème (du cours de SUP) donnant le DL_m du produit de deux fonctions conduit à

$$\text{Le coefficient de } x^p \text{ dans le DL}_m \text{ de } g^2 \text{ en } 0 \text{ est } \sum_{j=0}^p b_j b_{p-j} .$$

Si $p \neq 3$ alors le coefficient de x^p du DL_m de $x \mapsto g^2(x) - xg(x) + x^3$ en 0 vaut

$$(\text{en posant } b_{-1} = 0) \left(\sum_{j=0}^p b_j b_{p-j} \right) - b_{p-1} . \text{ Si } p = 3 \text{ alors il vaut } \left(\sum_{j=0}^3 b_j b_{3-j} \right) - b_2 + 1 .$$

II.C -

II.C - 1)

D'après le cours (de SPE) $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = k!a_k$ donc en particulier $f'(0) = a_1 = 0$.

II.C - 2)

Les calculs du II.B - 3) permettent d'obtenir le DL m en 0 de la fonction $\Delta : x \mapsto f^2(x) - xf(x) + x^3$. On trouve $\Delta(x) = x^m \varepsilon_m(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_m(x) = 0$, et ce quel que soit m dans $\mathbb{N}$. On peut conclure (en tenant compte des résultats de II.B - 2) appliqués à Δ)

Si $\Delta : x \mapsto f^2(x) - xf(x) + x^3$ est Développable en Série Entière en 0 alors elle est nulle sur $] -R, R[$.

II.C - 3)

R.A.S.

Le polynôme $X^2 - xX + x^3$ possède deux racines $r_1(x) = \frac{x}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x})$ et

$r_2(x) = \frac{x}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x})$ lorsque $x \leq \frac{1}{4}$.

On observe (grâce à des DL simples) que $r_2(x) \sim_0 x$ ce qui donne $r_2'(0) = 1 \neq 0$ et $r_1(x) \sim_0 x^2$ qui donne

$$r_1'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_1(x) - r_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ . C.Q.F.T.}$$

$$h(x) = \frac{x}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x}) \text{ sur }]-\infty, \frac{1}{4}[\text{ et } \beta = \frac{1}{4} \text{ .}$$

II.D -II.D - 1) **R.A.S.**

Le cours (de SPE) dit $\forall x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x^n$ avec

$$\gamma_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \text{ .}$$

Si α n'est pas dans $\mathbb{N}$ alors on trouve (pour $n > \alpha$) $\left| \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1} \sim_{+\infty} 1$ donc $R = \frac{1}{1}$.

Si α n'est pas dans $\mathbb{N}$ alors le rayon de convergence du D.S.E. de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est 1 .
Sinon il vaut $+\infty$.

II.D - 2) **R.A.S.**

On obtient
$$\forall x \in]-1, 1[, \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n$$

II.D - 3) **R.A.S.**

On obtient
$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} x^n$$

REMARQUE : sans nouveau calcul et en tenant compte de II.D - 1) on peut affirmer que le rayon de convergence de la série entière qui développe h sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ vaut $\frac{1}{4}$.

II.D - 4) Question assez délicate que j'avais personnellement « boycottée » en première lecture en admettant (de façon cavalière vis à vis du programme officiel) que la fonction f^2 est développable en série entière en 0 . Ce qui permet aisément de montrer que la fonction Δ (voir II.C - 2) l'est aussi et permet de conclure par l'unicité du D.S.E. en 0 d'une fonction . ($h = f$ sur un voisinage de 0 .)

Voici une solution (suggérée par Jean-Luc PETITPIERRE) qui respecte le programme :

Posons ici $b_0 = b_1 = 0$ et $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $b_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$. Autrement dit $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est le

D.S.E. en 0 de h .

D'après II.C - 3) la fonction $\delta : x \mapsto h^2(x) - xh(x) + x^3$ est identiquement nulle sur $] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$.

En conséquence la partie régulière de chacun de ses DL m en 0 ne comporte que des termes nuls (unicité du DL m en 0 lorsqu'il existe) .

D'après II.B - 3) on a donc (en posant $b_{-1} = 0$)

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{3\}, \left(\sum_{j=0}^p b_j b_{p-j} \right) - b_{p-1} = 0 \text{ et aussi } \left(\sum_{j=0}^3 b_j b_{3-j} \right) - b_2 + 1 = 0 .$$

En changeant p en $n+1$ dans la première relation on lit donc

$$\begin{cases} b_0 = b_1 = 0 & (1) \\ b_2 = 1 & (2) \\ \forall n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket, b_n = \sum_{j=0}^{n+1} b_j b_{n+1-j} = \sum_{j=2}^{n+1} b_j b_{n+1-j} \end{cases}$$

Les conditions initiales (1) et (2) étant celles vérifiées par la suite des a_n et la dernière relation étant également vérifiée par cette suite , on montre par une récurrence (faible) que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont égales . C.Q.F.D.

II . E

R.A.S. On a $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, a_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2}$

II . F

La simple définition de a_n comme « nombre de pavages d'un polygone etc. » et les conventions définissant les premiers termes prouve que tous les a_n sont dans $\mathbb{N}$ donc $\frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2}$ le reste aussi . C.Q.F.D.

Partie III - Equivalent de a_n

(ou « Intégrales de WALLIS » donc un vieux classique ... pour les profs !)

III . A

R.A.S.

On montre que l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ et on la traite par le théorème " convergence et équivalents " en utilisant le théorème concernant les intégrales de RIEMANN .

On trouve aussi $I_0 = \frac{\pi}{2}$ (à vue) et $I_1 = 1$ (changement de variable $t = \tan(\theta)$) .

III . B

III . B . 1)

R.A.S.

Evaluation de $I_{n+1} - I_n$ par linéarité de l'intégrale puis étude de son signe .

III . B . 2)

R.A.S. " astuce " $1 = 1 + t^2 - t^2$ puis intégration par parties .

III . B . 3)

R.A.S. On montre $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$ puis on utilise le théorème d'encadrement .

III . C

R.A.S. $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ puis $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

III . D

R.A.S. $\forall n \in \llbracket 7, +\infty \rrbracket, I_{2n-4} = \frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9) \dots 3 \times 1 \pi}{(2n-4)(2n-6) \dots 6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2}$ puis ...

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, I_{2n-4} = \frac{\pi(2n-4)!}{2^{2n-3}(n-2)!^2} \text{ et } a_n = \frac{2^{2n-3}}{(n-1)\pi} I_{2n-4} .$$

Enfin $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n-4}}{n^{3/2}}$.

REMARQUES :

1) Le calcul de I_1 n'était donc là que pour tester les aptitudes des candidats pour le calcul intégral .

2) La preuve correcte du dernier résultat demande de substituer $2n-4$ à n dans $I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} (1 + \varepsilon_n)$.

Partie IV - Etude d'une fonction

IV.A

On sait depuis II.D.3 et II . E que $\forall x \in] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$, $h(x) = \frac{x}{2}(1 - \sqrt{1-x}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} x^n$

Donc il n'y a rien de nouveau !

(Je suppose que cette question est surtout formulée pour les candidats qui auront « zappé » la partie II !)

REMARQUE : on connaît déjà le rayon de convergence de la série entière qui définit ϕ donc on peut dès à présent conclure

$$] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [\subset \mathcal{D}_\phi \subset [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}] .$$

Etude des variations de ϕ :

$$\forall x \in] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [, \phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} (\sqrt{1-4x} + 6x - 1) \text{ qui est du signe de } \sqrt{1-4x} + 6x - 1 \text{ noté}$$

$s(x)$ dans la suite .

On montre que l'équation $s(x) = 0$ n'a qu'une solution (à savoir 0) sur $] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$.

Sachant que s est continue et ne s'annule pas sur $] \frac{-1}{4}, 0 [$ (un intervalle) , elle y garde un signe constant (théorème des

valeurs intermédiaires) . On peut raisonner de même sur $] 0, \frac{1}{4} [$.

Ces signes s'obtiennent (par exemple) avec $s(x) \underset{0}{\sim} 2x$.

Pour le tracé de la courbe on a également besoin de connaître le comportement de ϕ au voisinage de $-\frac{1}{4}$ et au voisinage

de $\frac{1}{4}$ lequel comportement est aussi celui de h puisque h et ϕ coïncident sur $] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$.

- En $-\frac{1}{4}$: h est dérivable en $-\frac{1}{4}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \varphi(x) = h(-\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}-1}{8} \approx 0,05$ et la demi tangente de

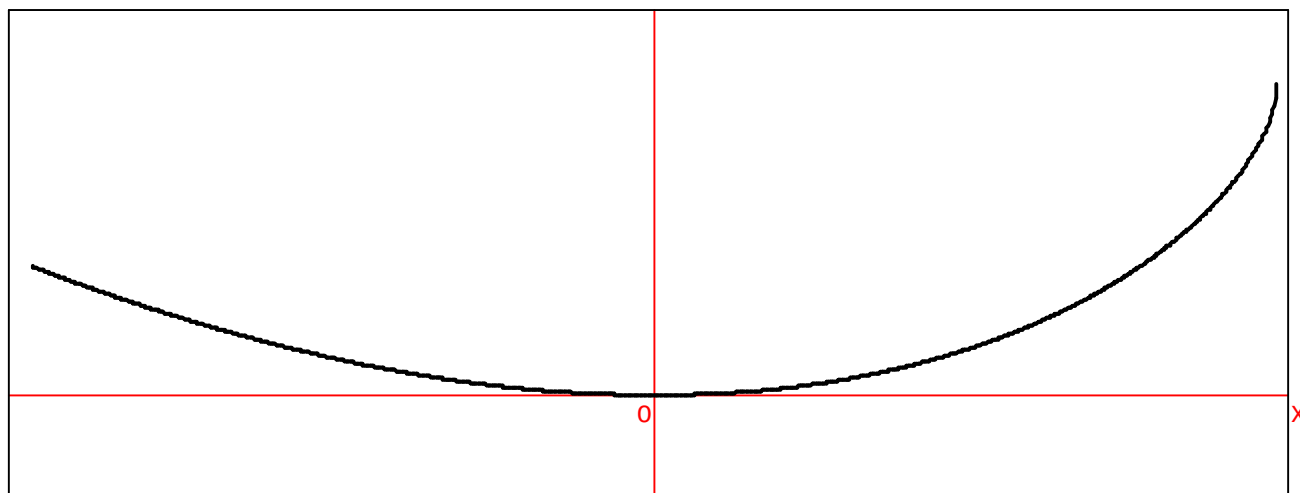
départ admet $h'(-\frac{1}{4}) = \frac{4-5\sqrt{2}}{8} \approx -\frac{3}{8}$ pour coefficient directeur .

- En $\frac{1}{4}$: h est continue en $\frac{1}{4}$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \varphi(x) = h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$.

De plus $\begin{cases} h \text{ est continue sur }]0, \frac{1}{4}] \\ h \text{ est dérivable sur }]0, \frac{1}{4}[\text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} h'(x) = +\infty \end{cases}$ donne $h'_g(\frac{1}{4}) = +\infty$ (par le « théorème

du point d'arrêt généralisé ») et donc la demi tangente d'arrivée (en $(\frac{1}{4}, h(\frac{1}{4}))$) sur la courbe de φ est verticale .

Tous ces renseignements permettent de tracer quelque chose qui ressemble fort à ...



IV.B

IV . B . 1)

R.A.S. (L'écart entre $h(x)$ et $\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} x^n$ est la somme d'une série à termes positifs .)

IV . B . 2)

R.A.S. (Appliquer le théorème de passage à la limite en tenant compte de la continuité de h en $\frac{1}{4}$.)

IV . B . 3)

R.A.S. La série $\sum Z_n$, avec $Z_n = \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} (\frac{1}{4})^n$ est convergente puisque ses sommes partielles constituent une suite croissante et majorée grâce au résultat de IV . B . 2) .

La série $\sum (-1)^n Z_n$ est absolument convergente donc convergente : $\boxed{\varphi(\frac{1}{4}) \text{ et } \varphi(-\frac{1}{4}) \text{ existent}}$.

IV.C

R.A.S. On a maintenant $\boxed{\mathcal{D}_\varphi = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}$ et le théorème d'ABEL permet d'affirmer que

φ est continue sur $\mathcal{D}_\varphi$ et vu qu'elle coïncide avec h (elle même continue sur $\mathcal{D}_\varphi$) sur $] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [$ on peut

conclure $\forall x \in [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}], \varphi(x) = \frac{x}{2} (1 - \sqrt{1 - 4x})$.

IV.D

IV . D . 1) **Question de cours**

IV . D . 2)

R.A.S. On trouve $\forall x \in] \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} [, x(1 - 4x)\varphi'(x) - (1 - 6x)\varphi(x) = p(x)x^2$.

IV . D . 3)

R.A.S. (calcul immédiat de vérification)

IV . D . 4) **R.A.S.**

" La " solution générale de (E) sur $] -\infty, 0 [$ ou sur $] 0, \frac{1}{4} [$ se définit par

$$x \mapsto \frac{x}{2} + \mu x \sqrt{1 - 4x} \quad \text{où } \mu \text{ est une constante (réelle ou complexe) .}$$

IV . D . 5)

R.A.S.

REMARQUE : Le recollement en 0 conduit au résultat suivant (que n'exigeait pas l'énoncé)

" La " solution générale de (E) sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} [$ est définie par

$$x \mapsto \frac{x}{2} + \mu x \sqrt{1 - 4x} \quad \text{où } \mu \text{ est une constante (réelle ou complexe) .}$$

IV.E

IV . E . 1) La réponse est **NON !** (On a déjà vu que $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \varphi'(x) = +\infty$.)

IV . E . 2)

La réponse est **NON !** car dans le cas contraire le théorème d'ABEL (appliqué au D.S.E. de φ') donnerait la continuité

de φ' sur le segment $[0, \frac{1}{4}]$ et par conséquent l'ensemble $\varphi'([0, \frac{1}{4}])$ serait lui-même un segment (image

continue d'un segment par une application numérique continue) et φ' serait bornée sur $[0, \frac{1}{4}]$, ce qui est faux .

IV . E . 3)

R.A.S.

Pour le début il s'agit d'une simple vérification qui , par équivalences successives , se ramène à $7n + 3 > 0$ qui est vrai .

Ensuite on montre par les théorèmes de comparaison (divergence par minoration) et des équivalents que la série

$\sum \ln(x_n) - \ln(x_{n+1})$ est divergente et donc que la suite $(\ln(x_n))_{n \geq 2}$ est également divergente . Comme par

ailleurs elle est décroissante elle admet nécessairement la limite $-\infty$ et on peut conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

IV . E . 4)

R.A.S.

Pour la première question on montre que la série mise en jeu vérifie les trois hypothèses du théorème généralement connu sous le nom de « critère spécial des séries alternées » et donc la réponse est **OUI** .

Ensuite le théorème d'ABEL permet de montrer que $\varphi'(x)$ admet une limite réelle en $-\frac{1}{4}$ et le théorème du point d'arrêt

permet ensuite d'en conclure que φ (déjà connue pour sa continuité sur $[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}]$) est dérivable en $-\frac{1}{4}$ (du moins à

droite) mais nous le savions déjà ! (IV.A allié à IV.C)

FIN !