Signalons tout d'abord que cette énoncé ne fait que "rappeler" la notation et la définition de la trace qui est **explicitement** hors programme. Et comme on a "besoin" d'utiliser sa linéarité et son invariance par changement de base, ce sujet est hors programme.

I.A.1) $S_2(\mathbb{C})$ est clairement de dimension 3 car

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

en est une famille libre et génératrice.

I.A.2)

$$\begin{aligned} \det\left({}^tPMP\right) &= \det\left({}^tP\right)\det(M)\det(P) \\ &= \det(M)\left(\det(P)\right)^2 \end{aligned}$$

qui est donc non nul. ${}^tPMP$ est donc inversible, il en est de même pour ${}^tPNP$. On a maintenant M harmonique relativement à N, soit X, X' qui réalise cette harmonie et $Y = P^{-1}X$ et $Y' = P^{-1}X'$, (Y, Y') est bien une base de $\mathbb{C}^2$ et :

$$\begin{aligned} {}^tY{}^tPMPY &= {}^t(PY)M(PY) = {}^tXMX = 0 \\ {}^tY'{}^tPMPY' &= {}^t(PY')M(PY') = {}^tX'MX' = 0 \\ {}^tY{}^tPNPY' &= {}^t(PY)N(PY') = {}^tXNX' = 0 \end{aligned}$$

Ce qui assure que ${}^tPMP$ est harmonique relativement à ${}^tPNP$.

I.B.1) Tout d'abord, $b = 0$ entraine M non inversible. b est bien non nul.
On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= (x, y)\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2bxy + cy^2 = y(2bx + y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc les deux droites vectorielles d'équation $y = 0$ et $2bx + y = 0$. Les bases cherchées sont de la forme $\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu\begin{pmatrix} c \\ -2b \end{pmatrix}\right)$ avec λ, μ non nuls.
Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} c \\ -2b \end{pmatrix}$. On a l'harmonie si et seulement si :

$${}^tXNX' = (1, 0)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ -2b \end{pmatrix} = \alpha c - 2b\beta = 0$$

Ce qui assure le résultat.

I.B.2) On a maintenant ${}^tXMX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ qui est une équation du second degré en x puisque a est non nul.

Les racines sont $x = \dfrac{-b+d}{a}y$ et $x = \dfrac{-b-d}{a}y$. ${}^tXMX = 0$ correspond encore à deux droites vectorielles engendrées par $\begin{pmatrix} -b-d \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b+d \\ a \end{pmatrix}$.
Prenons $X = \begin{pmatrix} -b-d \\ a \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} -b+d \\ a \end{pmatrix}$.
On a donc l'harmonie si et seulement si :

$$\begin{aligned} {}^tXNX' &= (-b-d, a)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b+d \\ a \end{pmatrix} \\ &= \alpha\underbrace{\left(b^2-d^2\right)}_{=ac} - 2ab\beta + \gamma a^2 \\ &= a\left(\alpha c - 2b\beta + \gamma a\right) = 0 \end{aligned}$$

Comme a est non nul, on obtient bien la condition $\alpha c - 2b\beta + \gamma a = 0$. Cette condition est compatible avec la condition précédente avec $a = 0$.

I.B.3) Les rôles joués par a, b, c et α, β, γ étant symétriques, M harmonique relativement à N entraine N harmonique relativement à M. D'où l'équivalence annoncée.

I.C) Par un calcul classique, on obtient

$$N^{-1} = \frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma}\begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$tr\left(N^{-1}M\right) = \frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma}\left(a\gamma - 2b\beta + c\alpha\right)$$

On a bien la nullité de la trace si et seulement si on a l'harmonie.

I.D) L'application $S_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associe $a\gamma - 2b\beta + c\alpha$ est clairement linéaire et non nulle, de rang 1, puisque N est non nulle et qu'on arrive dans $\mathbb{C}$.
$\mathcal{H}$ qui n'est que son noyau est un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbb{C})$ de dimension 2 par application du théorème du rang.
Un supplémentaire de $\mathcal{H}$ est donc de dimension 1.
D'autre part, on remarque que $tr\left(N^{-1}N\right) = tr(I) = 2$, ce qui prouve que N n'appartient pas à $\mathcal{H}$ et engendre donc un supplémentaire de $\mathcal{H}$.

I.E.1) On remarque que la trace est clairement une application linéaire. Pour simplifier l'écriture, on va montrer que M_1 n'est pas combinaison linéaire des autres matrices. La démonstration vaut pour chacune d'entre elles. Si on a :

$$M_1 = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i M_i$$

Alors :

$$\begin{aligned} tr\left(M_1^{-1}M_1\right) &= tr\left(I\right) = 2 \\ &= tr\left(M_1^{-1}\sum_{i=2}^{k}\lambda_i M_i\right) \\ &= \sum_{i=2}^{k}\lambda_i tr\left(M_1^{-1}M_i\right) = 0 \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

I.E.2) Si une famille est liée, l'une des matrices est combinaison linéaire des autres, ce qui est impossible dans une famille harmonique.
Comme on est dans un espace de dimension 3, il ne peut y avoir de famille harmonique de plus de 3 matrices et une famille harmonique de 3 matrices est une base.

I.F) Compte tenu de la propriété précédente, si B et C sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, A et B sont harmoniques si et seulement si $\lambda c + \mu a = 0$, système linéaire de rang 1 à 3 inconnues $(a, b$ et $c)$.
Les solutions sont paramétrées par α et β, de la forme

$$a = \lambda\alpha, b = \beta, c = -\mu\alpha$$

ce qui est la forme demandée.
On fait la même chose pour A et C en appelant α' et β' les paramètres.
Maintenant, il nous faut de plus B et C harmoniques, c'est à dire

$$-\alpha\alpha'\lambda\mu - \alpha\alpha'\lambda\mu = 2\beta\beta'$$

ou encore

$$\alpha\alpha'\lambda\mu + \beta\beta' = 0$$

système linéaire de rang 1 à 2 inconnues.
Les solutions sont paramétrées par k de la forme

$$\alpha' = \beta k, \quad \beta' = -\alpha\lambda\mu k.$$

Les triplets harmonique sont donc les triplets de matrices inversibles de la forme

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta \\ \beta & -\alpha\mu \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \beta\lambda k & -\alpha\lambda\mu k \\ -\alpha\lambda\mu k & -\beta\mu k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \lambda\mu \\
\det(B) &= -\left(\alpha^2\lambda\mu+\beta^2\right) \\
\det(C) &= -k^2\lambda\mu\left(\alpha^2\lambda\mu+\beta^2\right) \\
\det(B)\det(C) &= k^2\lambda\mu\left(\alpha^2\lambda\mu+\beta^2\right)^2 \\
&= k^2\left(\alpha^2\lambda\mu+\beta^2\right)^2\det(A)
\end{aligned}$$

qui est du signe de $\det(A)$.

I.G) Le problème est de montrer que

$$tr\left(\left({}^tPA_0P\right)^{-1}\left({}^tPB_0P\right)\right)=0$$

On a :

$$\begin{aligned}
tr\left(\left({}^tPA_0P\right)^{-1}\left({}^tPB_0P\right)\right) &= tr\left(P^{-1}A_0^{-1}\quad {}^tP^{-1}\quad {}^tPB_0P\right) \\
&= tr\left(P^{-1}A_0^{-1}B_0P\right) \\
&= tr\left(A_0^{-1}B_0\right)=0
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété $tr\left(P^{-1}AP\right)=tr(A)$ qui découle de $tr(AB)=tr(BA)$ qu'on montre en faisant le calcul et en obtenant $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{j,i}$ qui est une formule symétrique en a et b.
Ce qu'on a fait avec A_0 et B_0 se fait de la même façon avec les deux autres couples de matrices. On obtient donc bien un nouveau triplet harmonique.
D'autre part, on sait que si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec au besoin une matrice de passage orthogonale, c'est à dire pour laquelle $P^{-1}=\ {}^tP$.
En admettant le résultat indiqué avec (A,B,C) un triplet harmonique, ${}^tPAP$ est diagonale et $({}^tPAP,{}^tPBP,{}^tPCP)$ est aussi un triplet harmonique donc de la forme du I.F). On pose $Q=P^{-1}$, les triplets harmoniques sont donc de la forme $({}^tQAQ,{}^tQBQ,{}^tQCQ)$ avec A,B,C de la forme obtenue au I.F).
Enfin, dans le cas où les matrices sont réelles, on a vu que $({}^tPAP,{}^tPBP,{}^tPCP)$ correspondait à un changement de base. Le déterminant est invariant dans un changement de base. Donc les déterminants sont ceux du I.F) dont on a vu que le produit était strictement positif.

I.H) On pose $S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix} x & z \\ y & t\end{pmatrix}$,

$$tr(SM)=ax+b(y+z)+ct=0$$

avec a,b,c quelconques. On obtient donc $x=0$, $y+z=0$, $t=0$. M est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0\end{pmatrix}$.

Prenons $D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien D inversible vérifiant

$$tr\left(A^{-1}D\right)=tr\left(B^{-1}D\right)=tr\left(C^{-1}D\right)=0$$

car A^{-1} est symétrique ainsi que les deux autres.
(A,B,C,D) est une base car c'est une famille libre. Ceci découle simplement que D n'est pas symétrique et que (A,B,C) est libre.

II.A.1) 1 ou -1 solution de (1) ou de (2) entraine $b=-1$ ou $b=1$ ce qui implique $\det(B)=0$ et B non inversible.
D'autre part, si (1) et (2) ont une solution commune, elle est racine de la première, donc non nulle. Et $(2)-b\,(1)$ donne $2\left(1-b^2\right)z=0$ et encore une fois $b=-1$ ou $b=1$ ce qui est impossible.

II.A.2)

$$\begin{aligned}
\frac{z_1-1}{z_1+1} &= \frac{-b+d-1}{-b+d+1} \\
\frac{z_1'-1}{z_1'+1} &= \frac{-b-d-1}{-b-d+1} \\
\frac{z_1-1}{z_1+1}+\frac{z_1'-1}{z_1'+1} &= \frac{-b+d-1}{-b+d+1}+\frac{-b-d-1}{-b-d+1} \\
&= \frac{(-b+d-1)(-b-d+1)+(-b-d-1)(-b+d+1)}{(-b+d+1)(-b-d+1)} \\
&= \frac{b^2-(d-1)^2+b^2-(d+1)^2}{(-b+d+1)(-b-d+1)} \\
&= \frac{2\left(b^2-d^2-1\right)}{(-b+d+1)(-b-d+1)}=0
\end{aligned}$$

On a la même chose exactement pour l'autre.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
&(z_2-z_1)(z_2'-z_1')+(z_2-z_1')(z_2'-z_1) \\
&= 2z_2z_2'+2z_1z_1'-(z_1z_2'+z_2z_1'+z_1z_2+z_1'z_2') \\
&= 2p_2+2p_1-(z_1+z_1')(z_2+z_2')=2p_2+2p_1-s_1s_2
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{(z_2-z_1)}{(z_2-z_1')}+\frac{(z_2'-z_1)}{(z_2-z_1')} &= \frac{(z_2-z_1)(z_2'-z_1')+(z_2-z_1')(z_2'-z_1)}{(z_2-z_1')(z_2-z_1')} \\
&= \frac{2p_2+2p_1-s_1s_2}{(z_2-z_1')(z_2-z_1')}=\frac{2+2-(-2b)(-2/b)}{(z_2-z_1')(z_2-z_1')}=0
\end{aligned}$$

II.A.3)

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(z)) &= \frac{\dfrac{z-i}{1-zi}-i}{1-\dfrac{z-i}{1-zi}i} = \frac{\dfrac{z-i-i(1-zi)}{1-zi}}{\dfrac{1-zi-(z-i)i}{1-zi}} \\
&= \frac{z-i-i-z}{1-zi-zi-1} = \frac{-2i}{-2zi} \\
&= \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

II.A.4)

$$\begin{aligned}
b\left(\frac{z-i}{1-zi}\right)^2 + 2\frac{z-i}{1-zi} + b &= \frac{b(z-i)^2 + 2(1-zi)(z-i) + b(1-zi)^2}{(1-zi)^2} \\
&= \frac{b\left(z^2-2iz-1+1-2iz-z^2\right) + 2\left(z-i-iz^2-z\right)}{(1-zi)^2} \\
&= \frac{b(-4iz) - 2i\left(z^2+1\right)}{(1-zi)^2} = \frac{-2i}{(1-zi)^2}\left(z^2+2bz+1\right)
\end{aligned}$$

Pour $1-iz$ non nul, on a bien z solution de (1) si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de (2).

II.B.1) On a $z\overline{z} = x^2+y^2$ et $z-\overline{z} = 2iy$ ce qui donne bien

$$z\overline{z} - t\frac{z-\overline{z}}{2i} - 1 = x^2+y^2-ty-1$$

Annuler ce terme donne bien l'équation d'un cercle. De plus, si un cercle passe par P et P', son centre est sur Oy en $(0, t/2)$. Ce cercle est d'équation

$$x^2+y^2-ty-k=0$$

Comme il passe par P, k vaut 1. On a bien le résultat demandé.

$$\begin{aligned}
F(X,Y) &= \frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}} - t\frac{\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}}{2i} - 1 = \frac{1 - t\dfrac{\overline{z}-z}{2i} - z\overline{z}}{z\overline{z}} \\
&= \frac{-1}{z\overline{z}}\left(z\overline{z} - t\frac{z-\overline{z}}{2i} - 1\right) \\
&= \frac{F(x,y)}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Pour z non nul, $F(X,Y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = 0$ ce qui correspond à $M(z)$ appartient au cercle si et seulement si $M(1/z)$ appartient au cercle.

II.B.2) La droite (PP') étant la droite réelle, cela revient à montrer que z_1 n'est pas réel. Mais, comme z_1 n'est pas nul, $b = \dfrac{-1 - z_1^2}{2z_1}$ serait donc aussi réel ce qui est contraire à l'hypothèse.
On considère donc le cercle circonscrit au triangle $PP'Q$. On a

$$\begin{aligned}
(\widehat{P'Q, PQ}) &= \arg\left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}\right) \\
&= \pi + \arg\left(\frac{z_1' - 1}{z_1' + 1}\right) \\
&= \pi + (\widehat{P'Q', PQ'})
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que P, P', Q, Q' sont cocycliques. On fait la même chose à partir de R en utilisant la deuxième relation du début du II.A.2).

II.B.3) On a

$$\begin{aligned}
(z - \psi(z_1))(z - \psi(z_1')) = 0 & \\
&= \left(z - \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}\right)\left(z - \frac{z_1' - 1}{z_1' + 1}\right) \\
&= z^2 - z\underbrace{\left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} + \frac{z_1' - 1}{z_1' + 1}\right)}_{=0} + \left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}\right)\left(\frac{z_1' - 1}{z_1' + 1}\right) \\
&= z^2 + \frac{z_1 z_1' - (z_1 + z_1') + 1}{z_1 z_1' + (z_1 + z_1') + 1} = z^2 + \frac{1 + 2b + 1}{1 - 2b + 1} \\
0 &= z^2 + \frac{1 + b}{1 - b}
\end{aligned}$$

qui est l'équation cherchée. On fait la même chose avec les racines de l'autre équation, ce qui revient à remplacer b par $\dfrac{1}{b}$. L'équation dont les racines sont $\psi(z_2)$ et $\psi(z_2')$ est :

$$0 = z^2 + \frac{1 + 1/b}{1 - 1/b} = z^2 - \frac{1 + b}{1 - b}$$

$\psi(z_1), \psi(z_1'), \psi(z_2)$ et $\psi(z_2')$ sont dont les racines de :

$$z^4 - \left(\frac{1 + b}{1 - b}\right)^2 = 0$$

Ce sont donc les racines quatrièmes de $\left(\dfrac{1 + b}{1 - b}\right)^2$, leurs images sont bien les sommets d'un carré. Ils sont donc cocycliques. Le carré étant centré à l'origine, le cercle l'est aussi, son rayon est $\sqrt[4]{\left|\left(\dfrac{1+b}{1-b}\right)^2\right|}=\sqrt{\left|\dfrac{1+b}{1-b}\right|}$ et son équation

$$z\overline{z}=\left|\frac{1+b}{1-b}\right|$$

Enfin, Q,Q',R,R' ont des affixes qui vérifient donc

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z+1}\times\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}&=\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\\
&=\frac{z\overline{z}-(z+\overline{z})+1}{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}\\
\left|\frac{1+b}{1-b}\right|&=\frac{x^2+y^2-2x+1}{x^2+y^2+2x+1}
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\left(x^2+y^2\right)\left(1-\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right)-2x\left(1+\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right)+\left(1-\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right)=0$$

qui est l'équation d'un cercle sauf quand $\left|\dfrac{1+b}{1-b}\right|=1$ auquel cas, il s'agit d'une droite.

Q,Q',R,R' sont donc cocycliques ou alignés.

II.B.4) On a $\overrightarrow{TQ}$ d'affixe $z_1-\dfrac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}$ et $\overrightarrow{TQ'}$ d'affixe $z_1'-\dfrac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}$. On utilisera les notations introduites au II.A.1).

$$\begin{aligned}
z_1-\frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}&=\frac{z_1+z_1^2\overline{z_1}-z_1-\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=\frac{\left(z_1^2-1\right)\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}=\frac{\left(-2bz_1-1-1\right)\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=-2\frac{\left(bz_1+1\right)\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}=-2\frac{\left(b\left(-b+d\right)+1\right)\left(-\overline{b}+\overline{d}\right)}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=-2\frac{\left(-b^2+bd+1\right)\left(-\overline{b}+\overline{d}\right)}{1+z_1\overline{z_1}}=-2\frac{\left(bd-d^2\right)\left(-\overline{b}+\overline{d}\right)}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=-2d\frac{\left(b-d\right)\left(-\overline{b}+\overline{d}\right)}{1+z_1\overline{z_1}}=\frac{-2d}{1+z_1\overline{z_1}}\times\left(-\left|b-d\right|^2\right)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
z_1'-\frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}&=\frac{z_1'+z_1'z_1\overline{z_1}-z_1-\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=\frac{z_1'+\overline{z_1}-z_1-\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}=\frac{z_1'-z_1}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&=\frac{-2d}{1+z_1\overline{z_1}}
\end{aligned}$$

On a donc
$$\lambda=\frac{-1}{|b-d|^2}$$
qui convient. Ce qui prouve que T,Q,Q' sont alignés. De plus ω est réel, ce qui fait que T,P,P' sont aussi alignés. L'intersection de (PP') et (QQ') est T.
On sait aussi que $\varphi(z_1)$ est z_2 ou z_2' d'après le II.A.4). Calculons
$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(z_1)+\overline{\varphi(z_1)}}{1+\varphi(z_1)\overline{\varphi(z_1)}} &= \frac{\dfrac{z_1-i}{1-z_1 i}+\dfrac{\overline{z_1}+i}{1+\overline{z_1}i}}{1+\dfrac{z_1-i}{1-z_1 i}\times\dfrac{\overline{z_1}+i}{1+\overline{z_1}i}}\\
&= \frac{(z_1-i)(1+\overline{z_1}i)+(1-z_1 i)(\overline{z_1}+i)}{(1-z_1 i)(1+\overline{z_1}i)+(z_1-i)(\overline{z_1}+i)}\\
&= \frac{iz_1\overline{z_1}+z_1-i+\overline{z_1}+\overline{z_1}-z_1\overline{z_1}i+i-z_1\overline{z_1}i+z_1}{1-z_1 i+\overline{z_1}i+z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}-i\overline{z_1}+z_1 i+1}\\
&= \frac{2(z_1+\overline{z_1})}{2(1+z_1\overline{z_1})}=\frac{z_1+\overline{z_1}}{1+z_1\overline{z_1}}\\
&= \omega
\end{aligned}$$
Ce qui prouve maintenant que T,R,R' sont alignés.
Et enfin on obtient $(PP'),(QQ')$ et (RR') sont concourrantes en T.

III.A.1) On a très facilement
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/u & 0 & 0\\ 0 & 1/v & 0\\ 0 & 0 & 1/w\end{pmatrix}$$
On ne calcule que les éléments diagonaux de $A^{-1}B=\begin{pmatrix}a & \cdot & \cdot\\ \cdot & d & \cdot\\ \cdot & \cdot & f\end{pmatrix}$ et donc
$$tr\left(A^{-1}B\right)=a+d+f=0$$
De même, on ne calcule que les éléments diagonaux de
$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}dfvw-e^2 & \cdot & \cdot\\ \cdot & afuw-c^2 & \cdot\\ \cdot & \cdot & aduv-b^2\end{pmatrix}$$
qui permet d'obtenir
$$B^{-1}A=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}dfuvw-e^2u & \cdot & \cdot\\ \cdot & afuvw-c^2v & \cdot\\ \cdot & \cdot & aduvw-b^2w\end{pmatrix}$$
dont la trace est nulle si et seulement si
$$df+af+ad-\frac{e^2}{vw}-\frac{c^2}{uw}-\frac{b^2}{uv}=0$$

et en remplaçant $a+d$ par $-f$, ces deux égalités équivalent bien au système (3) annoncé.
a et d sont donc solution de

$$X^2 + fX + \frac{e^2}{vw} + \frac{c^2}{uw} + \frac{b^2}{uv} + f^2 = 0$$

Cette équation du second degré n'a des racines réelles que si son discriminant est positif. Or

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= \frac{f^2}{4} - \left(\frac{e^2}{vw} + \frac{c^2}{uw} + \frac{b^2}{uv} + f^2 \right) \\ &= -\left(\frac{3}{4} f^2 + \frac{e^2}{vw} + \frac{c^2}{uw} + \frac{b^2}{uv} \right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ce qui revient à

$$\frac{3}{4} f^2 + \frac{e^2}{vw} + \frac{c^2}{uw} + \frac{b^2}{uv} \leqslant 0$$

III.A.2) Si u, v, w sont de même signe, uv, uw, vw sont strictement positifs et donc

$$\frac{3}{4} f^2 + \frac{e^2}{vw} + \frac{c^2}{uw} + \frac{b^2}{uv} > 0$$

ce qui est impossible.

III.A.3) Si on a $c = e = 0$, la condition devient $\frac{3}{4} f^2 + \frac{b^2}{uv} \leqslant 0$. Comme $uv < 0$, il est facile de trouver b et f répondant à la question. Reste à vérifier qu'on a aussi B inversible.

$$\det(B) = fw \underbrace{\left(aduv - b^2\right)}_{=f^2uv} = f^3uvw$$

Il suffit donc de choisir f non nul et b tel que $b^2 \geqslant -\frac{4f^2}{3uv}$.

III.A.4) A est symétrique réelle, diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, on note A' la matrice diagonale correspondante.
On suppose que A et B sont harmoniques et on a A' diagonale et

$$\begin{aligned} P^{-1} &= {}^tP \\ A' &= P^{-1}AP \\ B' &= P^{-1}BP \\ tr\left(A'^{-1}B'\right) &= tr\left(P^{-1}A^{-1}PP^{-1}BP\right) \\ &= tr\left(P^{-1}A^{-1}BP\right) \\ &= tr\left(A^{-1}B\right) \end{aligned}$$

en vertu de propritétés décrites au I.G). On a le même résultat pour

$$tr\left(B'^{-1}A'\right) = tr\left(B^{-1}A\right)$$

On a donc A, B harmoniques si et seulement si A', B' harmoniques.
Si toutes les valeurs propres de A sont de même signe, A' n'a pas de conjugué harmonique d'après II.A.2), par contre, si les valeurs propres de A sont de signes distincts, on s'arrange pour que A' ait ses deux premiers éléments diagonaux de signes distincts, on utilise II.A.3) pour construire B' harmonique avec A'.
En conclusion, il existe B telle que A, B sont harmoniques si et seulement si les valeurs propres de A ne sont pas toutes de même signe.

III.B.1) On utilise le II.A.1) avec

$$(u, v, w, a, b, c, d, e, f) = \left(1, 1, -\alpha^2, 1, 0, \beta, 1, 0, -\gamma^2/w\right)$$

Le système (3) devient :

$$\begin{cases} 2 = \gamma^2/\alpha^2 \\ 1 = -\beta^2/\alpha^2 + 4 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} 2\alpha^2 = \gamma^2 \\ 3\alpha^2 = \beta^2 \end{cases}$$

On a donc quatre solutions pour le couple (β, γ) qui sont $\left(\pm\alpha\sqrt{3}, \pm\alpha\sqrt{2}\right)$. Attention, ces quatre couples ne fournissant que deux matrices B !

III.B.2)

$$\begin{aligned} C = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha\sqrt{3} & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/\alpha & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La question revient simplement à montrer que C est diagonalisable ! On cherche le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \alpha\sqrt{3} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\sqrt{3}/\alpha & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/\alpha & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda+1\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-j)\left(\lambda-j^2\right) \end{aligned}$$

On a trois valeurs propres simples, C est diagonalisable.
Par contre ses valeurs propres ne sont pas toutes réelles, le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc C n'y est pas diagonalisable.