Concours Centrale-Supélec 2000 - option TSI - Mathématiques 1

Partie I

I.A - Soit $u \in \left]-1,+\infty\right[\setminus \{0\}$ et appliquons la formule de Taylor-Lagrange à $x \to \ln(1+x)$, C^∞ sur $\left]-1,+\infty\right[$ sur $\underset{\leftrightarrows}{[0,u]}$. Il existe $c \in \underset{\leftrightarrows}{]0,u[}$ tel que $\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2(1+c)^2}u^2$. D'où :

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[,\ \ln(1+u) \leq u \text{ (l'inégalité est vraie pour } u=0)$$

En particulier si $x \in [0,1[$, en substituant $\left\{\begin{array}{c} x \text{ à } u \\ -x \text{ à } u \end{array}\right.$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} \ln(1+x) \leq x \\ \ln(1-x) \leq -x \end{array}\right.$, ce qui équivaut à :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[\,,\ x + \ln(1-x) \leq 0 \text{ et } x - \ln(1+x) \geq 0}$$

I.B - $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n}$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0 \text{ (d'après I.A)}$$

D'où (u_n) est décroissante.

$\forall n \geq 2,\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0 \text{ (d'après I.A)}$$

D'où (v_n) est croissante.

$\forall n \geq 2,\ u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

On a montré que <u>les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.</u>

Les suites (u_n) et (v_n) étant monotones, leur limite γ vérifie $\gamma = \inf(u_n)$ et $\gamma = \sup(v_n)$.

D'où : $\boxed{\forall n \geq 2,\ v_n \leq \gamma \leq u_n}$.

I.C - Grâce à une calculatrice, on peut calculer des valeurs approchées par excès de u_n, par défaut de v_n pour encadrer γ :

n	2	3	4	5	6
valeur approchée de u_n par excès	0.9	0.8	0.7	0.68	0.66
valeur approchée de v_n par défaut	0.3	0.4	0.4	0.47	0.49

On a donc $0.49 \leq \gamma \leq 0.66$. D'où <u>une valeur approchée de γ est 0.57 à 10^{-1} près.</u>

I.D - L'on a $\forall n \geq 2,\ w_n = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Donc <u>$\sum w_n$ converge.</u>

$$\forall p \geq 2,\ \forall m \geq p+1,\ u_p - u_m = \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \ln(p)\right) - \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln(m)\right)$$

$$= -\left(\sum_{n=p+1}^{m} \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=p+1}^{m} (\ln(n) - \ln(n-1))$$

$$= \sum_{n=p+1}^{m} \left(\ln(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=p+1}^{m} w_n$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient $\boxed{u_p - \gamma = \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n}$

I.E.1) $\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} g(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right)}$ (aire d'un trapèze)

I.E.2) h affine sur $\left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$, $h(k-1) = f(k-1)$, $h'(k-1) = f'(k-1)$ impliquent :

$\forall x \in \left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$, $h(x) - f(k-1) = f'(k-1)(x-k+1) \Leftrightarrow$

$\forall x \in \left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(x-k+1)$

h affine sur $\left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $h(k) = f(k)$, $h'(k) = f'(k)$ impliquent :

$\forall x \in \left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $h(x) - f(k) = f'(k)(x-k) \Leftrightarrow$

$\forall x \in \left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $h(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(x-k)$. D'où l'<u>unicité de h</u>.

Soit h la fonction définie par :

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(x-k+1) \text{ si } x < k - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(x-k) \qquad \text{si } x \geq k - \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

. Alors h est une fonction affine sur $\left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left[k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ telle que $h(k-1) = f(k-1)$, $h'(k-1) = f'(k-1)$, $h(k) = f(k)$ et $h'(k) = f'(k)$ (de manière simple). D'où l'<u>existence de h.</u>

I.E.3) h est continue sur $\left]-\infty, k-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]k-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ comme fonction affine sur ces intervalles. En $k-\frac{1}{2}$, on a :

$h\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}$ et h est continue à droite en $k-\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to \left(k-\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2}$.

$$\text{Or } \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} \Leftrightarrow k(k-1)^2 + \frac{(k-1)^2}{2} = (k-1)k^2 + \frac{k^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow k^3 - 2k^2 + k + \frac{k^2-2k+1}{2} = k^3 - k^2 + \frac{k^2}{2}$$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$. Cette équation n'ayant de solution entière,

<u>la fonction h n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.</u>

I.E.4) $\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} h(t)\ dt = \int_{k-1}^{k-\frac{1}{2}} h(t)\ dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} h(t)\ dt$

$$= \int_{k-1}^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2}(t-k+1)\right) dt + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(t-k)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2\left(k-1\right)^2}}_{h\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^-\right)} + \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{h(k-1)} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{h(k)} + \underbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(k - \frac{1}{2} - k)}_{h\left(k-\frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\left(k-1\right)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8\left(k-1\right)^2}. \text{ D'où :}$$

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} h(t)\ dt = \frac{1}{2\left(k-1\right)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8\left(k-1\right)^2}}$$

I.F - f est C^{∞} sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ f''(t) = \dfrac{2}{t^3}$; D'où f est convexe et l'arc de la représentation de f correspondant à l'intervalle $[k-1,k]$ est situé sous la corde : $\forall t \in [k-1,k]\ ,\ f(t) \leq g(t)$.

De même, f étant convexe, le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes. On en déduit :

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{\left(k-1\right)^2}(t-k+1) \leq f(t)$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2}(t-k) \leq f(t)$. Cela montre : $\forall t \in [k-1,k]\ ,\ h(t) \leq f(t)$.

Donc

$$\boxed{\forall t \in \boxed{k-1,k}\ ,\ h(t) \leq f(t) \leq g(t)}$$

I.G - L'inégalité précédente montre :

$\forall k \geq,\ \int_{k-1}^{k} h(t)\ dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leq \int_{k-1}^{k} g(t)\ dt \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2\left(k-1\right)} + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{8k^2} - \dfrac{1}{8\left(k-1\right)^2} \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t}\ dt \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k}\right) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{2\left(k-1\right)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8\left(k-1\right)^2} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right)}$$

I.H - $\dfrac{1}{2\left(k-1\right)} + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{8k^2} - \dfrac{1}{8\left(k-1\right)^2} \leq \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k}\right) \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2\left(k-1\right)} - \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{8k^2} - \dfrac{1}{8\left(k-1\right)^2} \leq w_k \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$

D'où $\forall p \geq 2, \forall m \geq p+1,\ \displaystyle\sum_{k=p+1}^{m} \frac{1}{2\left(k-1\right)} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8\left(k-1\right)^2} \leq \sum_{k=p+1}^{m} w_k \leq \sum_{k=p+1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2p} - \dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{8m^2} - \dfrac{1}{8p^2} \leq \displaystyle\sum_{k=p+1}^{m} w_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)$ et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2p} - \frac{1}{8p^2} \leq u_p - \gamma \leq \frac{1}{2p}}$$

I.I - On déduit de l'inégalité précédente :

$$u_p - \frac{1}{2p} \leq \gamma \leq u_p - \frac{1}{2p} + \frac{1}{8p^2}$$

Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de γ, il suffit de rendre:

$\dfrac{1}{8p^2} \leq 2 \times 10^{-3}$
$\Leftrightarrow p^2 \geq \dfrac{1000}{16} = 62.5$
$\Leftrightarrow p \geq 8$. Or :
$0.5759 < u(8) - 1/16 \leq \gamma \leq u(8) - 1/16 + 1/512 < 0.5779$ (calculatrice)
Donc une valeur approchée à 10^{-3} près de γ est 0.5769.

Partie II

II.A - $\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0, 1[\,,\ \dfrac{1-t^n}{1-t} = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \Rightarrow$
$\int_0^1 \dfrac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right)\, dt \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=}^{n} \frac{1}{i} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\, dt}$$

II.B - Or $\int_0^1 \dfrac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^1 \dfrac{1-(1-u)^n}{u}\, du$ (changement de variable $u = -t$)
$= \int_0^n \dfrac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx$ (changement de variable $x = nu$)
D'où :

$$\boxed{\sum_{i=}^{n} \frac{1}{i} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx}$$

Ona alors $u_n = \sum_{i=}^{n} \dfrac{1}{i} - \ln(n)$

$$= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx - \ln(n)$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx\right) - \int_1^n \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx$$

D'où :

$$\boxed{u_n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx}$$

II.C.1) exp est convexe. d'où le graphe de l'exponentielle est situé au-dessus de celui de sa tangente au point d'abscisse 0 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x}$$

II.C.2) Soit $x \in [0, n]$. En substituant $-\dfrac{x}{n}$ à x dans l'inégalité précédente, on obtient :
$1 - \dfrac{x}{n} \leq \exp\left(-\dfrac{x}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ (car $u \rightarrow u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$). Donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, n]\,,\ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}}$$

II.C.3) Soit $x \in [0,n]$. En substituant $\dfrac{x}{n}$ à x dans l'inégalité II.C.2), on obtient :
$1+\dfrac{x}{n} \leq \exp\left(\dfrac{x}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^x$. D'où :

$$\boxed{\forall x \in [0,n]\,,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x}$$

II.C.4) $\forall u \in \left]0,1\right]\,,\ \exists c \in \left]0,u\right[\,,\ (1-u)^n = 1-nu+\dfrac{n(n-1)}{2}(1-c)^{n-2}u^2$ (formule de Taylor-Lagrange). D'où : $\forall u \in \left]0,1\right]\,,\ 1-nu \leq (1-u)^n$ (qui est encore vrai pour $u=0$).

Si $x \in [0,n]\,,\ \dfrac{x^2}{n^2} \in [0,1]$ et en substituant $\dfrac{x^2}{n^2}$ à u dans l'inégalité précédente, on obtient :
$1-n\dfrac{x^2}{n^2} \leq \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$. D'où :

$$\boxed{\forall x \in [0,n]\,,\ 1-\frac{x^2}{n} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}$$

II.C.5) II.C.2) montre $\forall x \in [0,n]\,,\ 0 \leq e^{-x}-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$.

En outre $\forall x \in [0,n]\,,\ e^{-x}-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\left(1-e^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$

$$\leq e^{-x}\left(1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \text{ (d'après la question II.C.3))}$$

$$\leq e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$\leq e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right) \text{ (d'après la question II.C.4)). D'où :}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,n]\,,\ 0 \leq e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}\frac{x^2}{n}}$$

II.D- $x \to \dfrac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$; en outre $\forall x \in [1,+\infty[\,,\ \dfrac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge.

Donc $\underline{\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}\,dx \text{ converge.}}$

De plus :

$$\forall n \geq 2,\ u_n - \int_0^1 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx$$
$$- \int_0^1 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx + \int_n^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Or $\left|\int_0^1 \dfrac{e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 e^{-x}\dfrac{x}{n}\,dx = \dfrac{1}{n}\int_0^1 e^{-x}x\,dx$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\,dx = 0$ car $\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\,dx$ converge.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \int_0^1 (1-e^{-x})\dfrac{dx}{x} + \int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\,dx = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\gamma = \int_0^1 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx}$$

Partie III

III.A - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{1-\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}+o(x)} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}-1+o(x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}+o(1)$$

D'où φ se prolonge par continuité en 0 par $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$; donc $\exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ |\varphi(x)| \leq 2$ et φ, continue sur $[0, A]$, est bornée sur $[0, A]$.

Donc φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B - $x \to e^{-x}\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $x \geq A,\ |e^{-x}\varphi(x)| \leq 2e^{-x}$; or $\int_A^{+\infty} 2e^{-x}\,dx$ converge.

Donc, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx$ converge.

III.C - $x \overset{\psi}{\to} \dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}$ est continue sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\psi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{-x}-e^{-nx}) = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance).

Donc $I_n(a)$ existe pour tout $a > 0$.

De plus, $I_n(a) = \int_a^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}dx - \int_a^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{x}dx$

$= \int_a^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}dx - \int_{na}^{+\infty} \left(\dfrac{e^{-u}}{\dfrac{u}{n}} \times \dfrac{1}{n}\right) du$ (changement de variable $u = nx$ valide dans la seconde intégrale)

$$= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}dx$$
$$= \int_a^{na} \frac{1}{x}dx - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$$
$$= \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$$

On a montré :

$$\boxed{\forall a > 0,\ I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}dx = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}dx.}$$

III.D - ψ (notation précédente) est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En 0, $\psi(x) = \dfrac{1-x-1+nx+o(x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} n-1$ $(n \geq 2)$. Donc $\int_0^1 \psi(x)dx$ converge; comme $I_n(1)$ a un sens,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx \text{ converge.}}$$

$\forall a > 0,\ 0 \leq \int_a^{na} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx \leq \int_a^{na} dx$ (car $0 \leq 1-e^{-x} \leq x$ pour $x \geq 0$ (question II.C.1))

D'où $0 \leq \int_a^{na} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx \leq (n-1)a$ et $\lim\limits_{a\to0} \int_a^{na} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx = 0$.

En faisant tendre a vers 0 dans l'identité obtenue en III.E, on démontre :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx = \ln(n)}$$

III.E - $\int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\right)dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n-1} e^{-px}-\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\right)dx$ (somme des termes de la suite géométrique de raison e^{-x})

$= \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-px}dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$ (intégrales toutes convergentes)

$= \sum_{p=1}^{n-1} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^{+\infty} - \ln(n)$

$= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \ln(n)$

$= v_n$. On a montré :

$$\boxed{v_n = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)dx}$$

III.F - On déduit de la question précédente :

$\forall n \geq 2$, $v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)dx - \int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)dx$ (les intégrales convergent car φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$).

Or $\left|\int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)dx\right| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ (où M est un majorant de $|\varphi|$)

$\leq M\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} = \frac{M}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)dx = 0$ et comme $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$,

$$\boxed{\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)dx}$$

Partie IV

IV.A - $\ker\Phi = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/ P(X+1) - P(X) = 0\}$.

Soit $P \in \ker\Phi$; posons $Q = P - P(0)$. On a alors $Q(0) = 0$. Supposons $Q(p) = 0$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Alors $Q(p+1) = P(p+1) - P(0) = P(p) - P(0)$ (car $P(p+1) - P(p) = 0$)

$= 0$.

Q ayant une infinité de racines, Q est nul et P est constant. Réciproquement, un polynôme constant est bien dans $\ker\Phi$. Donc $\boxed{\ker\Phi = \mathbb{R}_0[X]}$.

$\ker\Phi_n \subset \ker\Phi = \mathbb{R}_0[X]$; d'autre part, tout polynôme constant est dans $\ker\Phi_n$. Donc $\boxed{\ker\Phi_n = \mathbb{R}_0[X]}$.

$$\operatorname{Im}\Phi_n = Vect\{\Phi(1),\ \Phi(X),\ \Phi(X^2), ..., \Phi(X^n)\}$$
$$= Vect\left\{1,\ 2X+1, ..., \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k X^k\right\}$$

$= \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (la famille $1,\ 2X+1,\ ...,\ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k X^k$ étant une famille de n polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, est libre donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Donc :

$\boxed{\operatorname{Im}\Phi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$; posons $d^\circ(Q) = r$. Alors $Q \in \mathbb{R}_r[X] = \operatorname{Im}\Phi_{r+1}$. Donc :

$\exists P \in \mathbb{R}_{r+1}[X],\ Q = \Phi_{r+1}(P) = \Phi(P)$.

D'où $\boxed{\operatorname{Im}\Phi = \mathbb{R}[X].}$

IV.B - D'après la question précédente, $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^p$. On a alors $\Phi(P - P(0)) = \Phi(P) - \Phi(P(0)) = \Phi(P) = X^p$.

Donc il existe un polynôme $P_p = P - P(0)$ tel que $\Phi(P_p) = X^p$ et $P_p(0) = 0$.

Soient 2 polynômes P_p et P'_p tels que $\Phi(P_p) = X^p$ et $\Phi(P'_p) = X^p$. On a alors :

$\Phi(P_p - P'_p) = 0 \Rightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ P_p - P'_p = \lambda$

$\Rightarrow \lambda = P_p(0) - P'_p(0) = 0$

D'où $P_p = P'_p$ et il y a unicité de $P_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(P_p) = X^p$ et $P_p(0) = 0$. On a montré :

$$\boxed{\exists! P_p \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P_p) = X^p \text{ et } P_p(0) = 0}$$

IV.C.1) $\Phi(Q_p) = Q_p(X+1) - Q_p(X)$

$= P'_p(X+1) - P'_p(X) \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi(Q_p) = \begin{cases} pX^{p-1} \text{ si } p > 0 \text{ (car } P_p(X+1) - P_p(X) = X^p) \\ 0 \text{ si } p = 0 \end{cases}}$$

IV.C.2) L'on a $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} Q_p(0) = P'_p(0) - P'_p(0) = 0 \\ \Phi(\dfrac{Q_p}{p}) = X^{p-1} = \Phi(P_{p-1}) \end{cases}$. Or il existe un polynôme unique P_{p-1} vérifiant $P_{p-1}(0) = 0$ et $\Phi(P_{p-1}) = X^{p-1}$. D'où $\dfrac{Q_p}{p} = P_{p-1}$. On a montré :

$$\boxed{\forall p \geq 1,\ P_{p-1} = pQ_p}$$

IV.D - Déterminons P_0; posons $P_0 = aX + b$ puique $\operatorname{Im}\Phi_1 = \mathbb{R}_0[X]$.

$P_0(X+1) - P_0(X) = 1 \Leftrightarrow a(X+1) + b - (aX+b) = 1$

$\Leftrightarrow a = 1$

$P_0(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Donc $\boxed{P_0 = X}$

On a alors $Q_1 = P_0$ (d'après IV.C.2)); d'où $P'_1(X) - P'_1(0) = X \Leftrightarrow$

$\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_1 = \dfrac{X^2}{2} + \alpha X + \beta$; Comme $P_1(0) = 0$, $\beta = 0$. Or le terme constant de $\Phi(X^2)$ vaut 1.

D'où $\Phi(P_1) = \dfrac{\Phi(X^2)}{2} + \alpha\Phi(X) \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{P_1 = \dfrac{X^2 - X}{2}}$.

On a alors $Q_2 = 2P_1$ (d'après IV.C.2)); d'où $P_2'(X) - P_2'(0) = X^2 - X \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_2 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \alpha X + \beta$; Comme $P_2(0) = 0$, $\beta = 0$. Or le terme constant de $\Phi(X^3)$ vaut 1.

D'où $\Phi(P_2) = \dfrac{\Phi(X^3)}{3} - \dfrac{\Phi(X^2)}{2} + \alpha\Phi(X) \Rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{6}$.

Donc $\boxed{P_2 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6}}$.

On a alors $Q_3 = 3P_2$ (d'après IV.C.2)); d'où $P_3'(X) - P_3'(0) = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{X}{2} \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_3 = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4} + \alpha X + \beta$; Comme $P_3(0) = 0$, $\beta = 0$. Or le terme constant de $\Phi(X^4)$ vaut 1.

D'où $\Phi(P_3) = \dfrac{\Phi(X^4)}{4} - \dfrac{\Phi(X^3)}{2} + \dfrac{\Phi(X^2)}{4} + \alpha\Phi(X)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$.

Donc $\boxed{P_3 = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4}}$.

On a alors $Q_4 = 4P_3$ (d'après IV.C.2)); d'où $P_4'(X) - P_4'(0) = X^4 - 2X^3 + X^2 \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_4 = \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^4}{2} + \dfrac{X^3}{3} + \alpha X + \beta$; Comme $P_4(0) = 0$, $\beta = 0$. Or le terme constant de $\Phi(X^5)$ vaut 1.

D'où $\Phi(P_4) = \dfrac{\Phi(X^5)}{5} - \dfrac{\Phi(X^4)}{2} + \dfrac{\Phi(X^3)}{3} + \alpha\Phi(X)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{-6 + 15 - 10}{30} = -\dfrac{1}{30}$.

Donc $\boxed{P_4 = \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^4}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X}{30}}$.

On a alors $Q_5 = 5P_4$ (d'après IV.C.2)); d'où $P_5'(X) - P_5'(0) = X^5 - \dfrac{5}{2}X^4 + \dfrac{5}{3}X^3 - \dfrac{X}{6} \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P_5 = \dfrac{X^6}{6} - \dfrac{X^5}{2} + \dfrac{5X^4}{12} - \dfrac{X^2}{12} + \alpha X + \beta$; Comme $P_5(0) = 0$, $\beta = 0$. Or le terme constant de $\Phi(X^6)$ vaut 1.

D'où $\Phi(P_5) = \dfrac{\Phi(X^6)}{6} - \dfrac{1}{2}\Phi(X^5) + \dfrac{5\Phi(X^4)}{12} - \dfrac{\Phi(X^2)}{12} + \alpha\Phi(X)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{12} + \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$.

Donc $\boxed{P_5 = \dfrac{X^6}{6} - \dfrac{X^5}{2} + \dfrac{5X^4}{12} - \dfrac{X^2}{12}}$.

IV.E - Étudions P_5 sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $P_5'(x) = x^5 - \dfrac{5}{2}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{x}{6}$

$= x(x-1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \dfrac{1}{3}\right)$. Les racines de $x^2 - x - \dfrac{1}{3}$ sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}}}{2}$ et situées de part et d'autre de $[0,1]$.

L'on en déduit le tableau de variations de P_5 :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$P_5'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$P_5(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{128}$	$\nearrow$	0

D'où :

$$\boxed{\forall x \in [0,1]\,,\ -\frac{1}{128} \leq P_5(x) \leq 0}$$

IV.F.1) - $I_{p+1}(k) = \int_0^1 \frac{(p+1)P_p(t)}{(t+k)^{p+2}}dt$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(p+1)P_p(t)}{-(p+1)(t+k)^{p+1}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{P_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{P_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}dt \text{ (car } P_p(0)=0 \text{ et } P_p(1)=P_p(0)=0) \\
&= \int_0^1 \frac{Q_p(t)+P_p'(0)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t)+P_p'(0)}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= I_p(k) + P_p'(0)\int_0^1 \frac{1}{(t+k)^{p+1}}dt \\
&= I_p(k) + P_p'(0)\left[\frac{1}{-p(t+k)^p}\right]_0^1 \text{. D'où :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{p+1}(k) = I_p(k) + \frac{P_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right)}$$

IV.F.2) $I_1(k) = \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{t+k}dt - \int_0^1 \frac{k}{(t+k)^2}dt$

$$\begin{aligned}
&= \ln\frac{k+1}{k} + k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1(k) = \ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} = w_{k+1}}$$

IV.F.3) $I_6(k) = I_5(k) + \frac{P_5'(0)}{5}\left(\frac{1}{k^5} - \frac{1}{(k+1)^5}\right)$

$$\begin{aligned}
&= I_5(k) \text{ car } P_5'(0) = 0 \\
&= I_4(k) - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) \text{ car } P_4'(0) = -\frac{1}{30} \\
&= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) + I_3(k) + \frac{P_3'(0)}{3}\left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\right) \\
&= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) + I_3(k) \text{ car } P_3'(0) = 0 \\
&= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + I_2(k) \text{ car } P_2'(0) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)+P_1'(0)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+I_1(k)$$

$$= -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+I_1(k)$$ car $P_1'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

D'où : $\boxed{I_6(k) = -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+I_1(k)}$

IV.F.4) D'après IV.E, $-\dfrac{1}{128}\int_0^1 \dfrac{6}{(t+k)^7}dt \le I_6(k) \le 0 \Rightarrow$

$-\dfrac{1}{128}\left[-\dfrac{1}{(t+k)^6}\right]_0^1 \le I_6(k) \le 0 \Rightarrow$

$$\boxed{-\frac{1}{128}\left[\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(k+1)^6}\right] \le I_6(k) \le 0}$$

IV.F.5) On obtient $\Rightarrow$alors :

$$-\frac{1}{128}\left[\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(k+1)^6}\right] \le -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\ln\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1} \le 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{128}\left[\frac{1}{k^6}-\frac{1}{(k+1)^6}\right]+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \le w_{k+1} \le \frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{128}\left[\frac{1}{(p-1)^6}-\frac{1}{p^6}\right]+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{(p-1)^4}-\frac{1}{p^4}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)\right] \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \le \sum_{p=n+1}^{+\infty}\left[\frac{1}{120}\left(\frac{1}{(p-1)^4}-\frac{1}{p^4}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{128n^6}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{2n} \le u_n-\gamma \le \frac{1}{120n^4}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{2n}}$$

IV.F.6) On en déduit :

$-\dfrac{1}{120n^4}+\dfrac{1}{12n^2}-\dfrac{1}{2n}+u_n \le \gamma \le \dfrac{1}{128n^6}-\dfrac{1}{120n^4}+\dfrac{1}{12n^2}-\dfrac{1}{2n}+u_n$.Cherchons une valeur approchée de γ à 10^{-11} près en rendant $\dfrac{1}{128n^6} \le 2\times 10^{-11} \Leftrightarrow n^6 \ge \dfrac{10^{11}}{256} \Leftrightarrow n \ge 28$.

Pour $n = 28$, on obtient :

$0.577\,215\,664\,89 < \gamma < 0.577\,215\,664\,92$; donc

les 10 premières décimales de γ sont 577215664 plus un 8 ou un 9. Pour conclure, il faut un encadrement plus fin; en prenant $n = 38$ par exemple, on trouve que la dernière décimale est un 9.

$\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty$

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 02 96 63 94 14
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr

à l'aide de Scientific Workplace