

# CCINP

## Session 2020

### Corrigé de l'épreuve de mathématiques TSI

## Problème 1

### Partie I – Préliminaires

1. Par définition,  $C_k$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $f_k$ . Or  $f_k \in E$ , qui est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel, donc  $C_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus  $f_k \neq 0_E$ , donc la famille  $(f_k)$  est libre, c'est donc une base de  $C_k$ . Ainsi,  $\dim(C_k) = 1$ . De même, si  $k \geq 1$ ,  $S_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1. En revanche,  $g_0$  est la fonction nulle, donc  $S_0$  est un espace vectoriel de dimension 0.
2. Soit  $f, g, h \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
  - D'abord

$$\varphi(g, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt = \varphi(f, g),$$

donc  $\varphi$  est symétrique.

- Ensuite, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g, h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f(t) + \mu g(t)) h(t) dt = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) h(t) dt + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) h(t) dt \\ &= \lambda \varphi(f, h) + \mu \varphi(g, h). \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est linéaire à gauche et, par symétrie,  $\varphi$  est linéaire à droite.

- De plus,

$$\varphi(f, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

Or  $f^2$  est une fonction positive, donc  $\varphi(f, f) \geq 0$ . Donc  $\varphi$  est positive.

- Enfin, supposons que  $\varphi(f, f) = 0$ . Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 0.$$

Or  $f^2$  est positive et continue sur  $[0, 2\pi]$ , donc

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t)^2 = 0, \quad f(t) = 0.$$

Ainsi  $f$  est nulle sur  $[0, 2\pi]$ . Or  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $\varphi$  est définie.

On a donc montré que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

3. D'une part, si  $k = 0$ , remarquons que  $f_0$  est la fonction constante égale à 1, et

$$\|f_0\|^2 = \varphi(f_0, f_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

Ainsi  $\|f_0\| = 1$ .  $f_0$  est donc une base orthonormée de  $C_0$ . D'autre part, si  $k \geq 1$ , on a

$$\|f_k\|^2 = \varphi(f_k, f_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt)^2 dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2kt)) dt = \frac{1}{2} + \left[ \frac{\sin(2kt)}{8k\pi} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\|f_k\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En posant  $\tilde{f}_k = \sqrt{2}f_k$  on a, par homogénéité de la norme,

$$\|\tilde{f}_k\| = \|\sqrt{2}f_k\| = \sqrt{2}\|f_k\| = 1.$$

Donc  $\tilde{f}_k$  est une base orthonormée de  $C_k$ .

4. Notons  $p_k$  la projection orthogonale sur  $C_k$ .  $C_k$  est un espace vectoriel de dimension finie donc on connaît l'expression de  $p_k$ . D'une part, si  $k = 0$ ,

$$p_0(f) = \varphi(f, f_0) f_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t) dt \right) f_0.$$

Autrement dit,  $p_0(f)$  est la fonction constante égale à  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ . D'autre part, si  $k \geq 1$ , on a

$$p_k(f) = \varphi(f, \tilde{f}_k) \tilde{f}_k = 2\varphi(f, f_k) f_k = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) f_k.$$

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_k(f)(x) = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \cos(kx).$$

5. D'une part, si  $k = 0$ ,

$$\varphi(f, f_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = a_0(f).$$

D'autre part, si  $k \geq 1$ ,

$$\varphi(f, f_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{2} \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{a_k(f)}{2}.$$

6. D'après les deux questions précédentes, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$p_k(f) = a_k(f) f_k.$$

## Partie II – Série de Fourier

7. D'une part,  $D_f = \mathbb{R}$  et, par imparité de la fonction sin, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(-x) = |\sin(-2x)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x).$$

Donc  $f$  est paire. D'autre part,

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left| \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right| = |\sin(2x + \pi)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x),$$

donc  $f$  est  $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

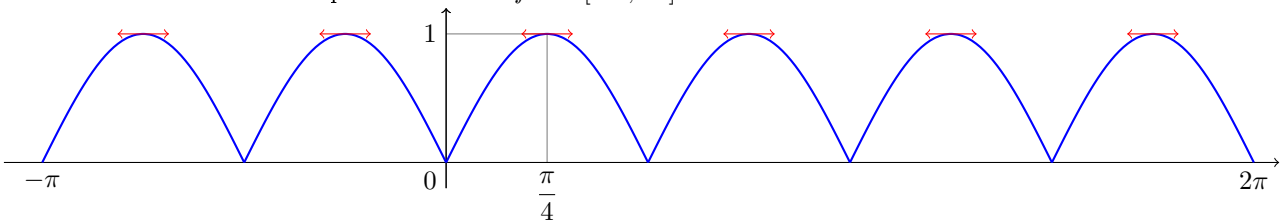
8.  $f$  étant  $\frac{\pi}{2}$ -périodique, on peut l'étudier sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ . Par parité, on peut ensuite restreindre le domaine d'étude à l'intervalle  $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Pour tout  $x \in I$ , on a  $f(x) = \sin(2x)$ .  $f$  est donc dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = 2 \cos(2x).$$

Donc  $f' \geq 0$  sur  $I$ . On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		0
$f(x)$	0	1

D'où l'allure de la courbe représentative de  $f$  sur  $[-\pi, 2\pi]$  :



9. La valeur moyenne de  $f$  sur une période est donnée par

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx = -\frac{1}{\pi} [\cos(2x)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

10. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Alors d'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} \sin(2x) \cos(4nx) &= \left( \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right) \left( \frac{e^{i4nx} + e^{-i4nx}}{2} \right) = \frac{e^{i(2+4n)x} - e^{-i(2+4n)x} + e^{i(2-4n)x} - e^{-i(2-4n)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin((2+4n)x) + \sin((2-4n)x)}{2}. \end{aligned}$$

11. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos(4nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin((2+4n)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin((2-4n)x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos((2+4n)x)}{2+4n} + \frac{\cos((2-4n)x)}{2-4n} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{-2}{2+4n} + \frac{-2}{2-4n} \right) \\ &= \frac{2-42+2+4n}{(2+4n)(2-4n)} = \frac{4}{4-16n^2} = \frac{-1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

12. La fonction  $f$  étant paire, la suite  $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est nulle. On a déjà calculé  $a_0(f)$  à la question 9, et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{\pi/2} x\right) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos(4nx) dx = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}.$$

13. D'après le théorème de Dirichlet, la fonction  $f$  étant continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , sa série de Fourier converge en tout  $x \in \mathbb{R}$  vers  $f(x)$  :

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(4nx) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \cos(4nx).$$

En particulier, en évaluant cette égalité en  $x = \frac{\pi}{4}$ , on a

$$\left| \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) \right| = 1 = \frac{2}{\pi} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)} = \frac{2 - \pi}{4}.$$

## Problème 2

### Partie I – Exemple

14. Notons  $A$  la matrice canoniquement associée à  $f$ . Alors

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$A^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(A + I_2),$$

donc  $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ .

15. Le polynôme caractéristique de  $f$  est donné par

$$\chi_f = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & X - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left(X - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}.$$

Le discriminant de  $\chi_f$  vaut

$$\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4},$$

donc les racines de  $\chi_f$  sont

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi  $\chi_f = (X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$  est scindé à racines simples, donc  $f$  est diagonalisable.<sup>1</sup> Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . D'une part,

$$\begin{aligned} f(x, y) = (x, y) &\iff \begin{cases} x + 3y = 4x \\ 3x + y = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = y \\ &\iff (x, y) \in \text{Vect}((1, 1)). \end{aligned}$$

Donc  $E_1(f) = \text{Vect}((1, 1))$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x, y) = -\frac{1}{2}(x, y) &\iff \begin{cases} x + 3y = -2x \\ 3x + y = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \iff y = -x \\ &\iff (x, y) \in \text{Vect}((1, -1)). \end{aligned}$$

Donc  $E_{-1/2}(f) = \text{Vect}((1, -1))$ . Ainsi la famille  $((1, 1), (1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  formée de vecteurs propres de l'endomorphisme  $f$ .

1. La matrice  $A$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable (en base orthonormée), mais on a besoin de connaître ses valeurs propres ici.

**Partie II – Cas général**

16. Puisque  $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)$ , on a donc

$$\text{Id}_E = 2f^2 - f = f \circ (2f - \text{Id}_E).$$

Ainsi  $f$  est une application linéaire inversible à droite, donc inversible, et  $f^{-1} = 2f - \text{Id}_E$ .

17. Les ensembles  $\ker(f - \text{Id}_E)$  et  $\ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$  sont des noyaux d'endomorphismes, donc des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

18. Montrons par analyse/synthèse que  $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ .

- Analyse : Soit  $x \in E$ , supposons qu'il existe  $y \in \ker(f - \text{Id}_E)$  et  $z \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$  tels que  $x = y + z$ . Alors

$$f(y) = y, \quad f(z) = -\frac{1}{2}z, \quad f(x) = f(y + z) = f(y) + f(z) = y - \frac{1}{2}z.$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = y - \frac{1}{2}z \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) \end{cases}.$$

- Synthèse : Pour  $x \in E$ , posons

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x), \quad z = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x).$$

Alors, puisque  $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)$ ,

$$\begin{aligned} y + z &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x) = x, \\ f(y) &= f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x)\right) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}f(x) = y, \\ f(z) &= f\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}f(x)\right) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}f^2(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f(x) = -\frac{1}{2}z, \end{aligned}$$

Ainsi  $x = y + z$  et  $y \in \ker(f - \text{Id}_E)$  et  $z \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ .

L'existence étant assurée par la synthèse, et l'unicité par l'analyse, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y, z) \in \ker(f - \text{Id}_E) \times \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right), \quad x = y + z.$$

Donc  $\ker(f - \text{Id}_E)$  et  $\ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

19. Les applications  $f$  et  $\text{Id}_E$  sont linéaires, et  $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)$ . D'où

$$(f - \text{Id}_E) \circ \left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right) = f \circ f - \text{Id}_E \circ f + \frac{1}{2}f \circ \text{Id}_E - \frac{1}{2}\text{Id}_E = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}_E = 0.$$

Soit  $y \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ , alors par définition, il existe  $x \in E$  tel que  $y = (f - \text{Id}_E)(x)$ . Donc

$$\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)(y) = (f - \text{Id}_E) \circ \left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)(x) = 0,$$

donc  $y \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ . Ainsi  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subseteq \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ . D'autre part, d'après le théorème du rang, puisque  $\dim(E) = n$  est finie,

$$\dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)) = \text{rg}(f - \text{Id}_E) = n - \dim(\ker(f - \text{Id}_E)).$$

Or d'après la question 18,  $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)$  donc

$$\dim(\ker(f - \text{Id}_E)) + \dim\left(\ker\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)\right) = n, \quad \dim\left(\ker\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)\right) = n - \dim(\ker(f - \text{Id}_E)).$$

Ainsi  $\dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)) = \dim\left(\ker\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)\right)$  donc  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \ker\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)$ .

20. Puisque  $f^2 = \frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)$ , on a bien

$$f^3 = f \circ f^2 = f \circ \left(\frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)\right) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}f + \frac{1}{4}\text{Id}_E + \frac{1}{2}f = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\text{Id}_E,$$

$$f^4 = f \circ \left(\frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\text{Id}_E\right) = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{3}{8}f + \frac{3}{8}\text{Id}_E + \frac{1}{4}f = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}\text{Id}_E.$$

21. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tels que  $f^n = a_n f + b_n \text{Id}_E$ .

• **Initialisation** : Rappelons que par convention,  $f^0 = \text{Id}_E$ . Alors, en posant  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$ , on a

$$f^0 = \text{Id}_E = a_0 f + b_0 \text{Id}_E.$$

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons qu'il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tels que  $f^n = a_n f + b_n \text{Id}_E$ . Alors

$$f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (a_n f + b_n \text{Id}_E) = a_n f^2 + b_n f = \frac{a_n}{2} f + \frac{a_n}{2} \text{Id}_E + b_n f = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right) f + \frac{a_n}{2} \text{Id}_E.$$

En posant

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{2},$$

on a  $f^{n+1} = a_{n+1} f + b_{n+1} \text{Id}_E$ , d'où hérédité.

On a donc montré que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tels que  $f^n = a_n f + b_n \text{Id}_E$ . Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n}{2} \end{cases}.$$

22. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}.$$

La suite  $(a_n)$  vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_n}{2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique étant  $\chi_f$ , on a déjà calculé sa racines, qui sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ . Donc il existe  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 + (-1)^n \frac{C_2}{2^n}.$$

En particulier, pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on a

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - \frac{C_2}{2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 2^{n-1}}.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^{n-1}}$$

On remarque que cette formule reste vrai au rang  $n = 0$ .

23. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ , on déduit des calculs précédents que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}.$$

## Problème 3

### Partie I – Préliminaires

24. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^n e^{-t^2} = 0, \quad t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\underset{\sim}{\sim}} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

25. La fonction  $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , l'unique borne incertaine est donc  $+\infty$ . Or les fonctions  $f_n$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  sont continues et positives sur  $]1, +\infty[$  et, d'après la question précédente,

$$t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par définition, il existe  $a \geq 1$  tel que

$$\forall t \geq a, \quad t^2 f_n(t) \leq 1, \quad f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale  $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  est une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des fonctions positives,  $\int_a^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  converge. D'après la relation de Chasles, on en déduit que  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est une intégrale convergente.

26. La fonction  $f_n$  est continue sur  $] -\infty, 0]$ . Par changement de variable  $s = -t$ , les intégrales  $\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2} dt$  et  $(-1)^n \int_0^{+\infty} s^n e^{-s^2} ds$  ont même nature, or la seconde converge d'après la question précédente. Donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 t^n e^{-t^2} dt$  converge, et donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente (par définition).

27. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Alors il existe  $d \in \mathbb{N}$  et  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  tels que  $P = \sum_{n=0}^d a_n X^n$ . Pour tout  $n \in [0, d]$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente, donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  est convergente par linéarité de l'intégrale généralisée.

28. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x < y$ . Les fonctions  $t \mapsto t^{n+1}$  et  $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[x, y]$ , on a, par intégration par parties,

$$\int_x^y t^{n+2} e^{-t^2} dt = \int_x^y t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left[ -t^{n+1} \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_x^y + \frac{n+1}{2} \int_x^y t^n e^{-t^2} dt.$$

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n+1} e^{-x^2} = 0$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{n+1} e^{-y^2} = 0$ . On peut alors passer à la limite quand  $x \rightarrow -\infty$  et  $y \rightarrow +\infty$ , et

$$I_{n+2} = 0 + \frac{n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{n+1}{2} I_n.$$

29. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  impair, la fonction  $t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$  est impaire, et l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt$  converge, donc

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt = 0.$$

30. Montrons par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

- **Initialisation** : D'après l'énoncé,

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = \frac{0!}{2^0 0!} \sqrt{\pi},$$

la propriété est donc vérifiée au rang 0.

- **Hérédité** : Soit  $p \in \mathbb{N}$ , supposons que  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ . Alors

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+1)(2p+2)(2p)!}{2 \times 2(p+1) \times 2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!} \sqrt{\pi},$$

la propriété est donc vérifiée au rang  $p+1$ .

On a donc montré que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

### Partie II – Recherche des extrema

31. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}$ . Alors d'après la question 27, l'intégrale  $F(x, y)$  converge. Ensuite, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [t^4 - (2x+2y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2] e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (I_4 - (2x+2y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0). \end{aligned}$$

Or d'après les questions 29 et 30,

$$I_0 = \sqrt{\pi}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

32. La fonction  $F$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + y + 2x^2y.$$

Alors, en remarquant que  $1 + 2x^2 > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} 2x + y + 2x^2y = 0 \\ x + 2y + 2xy^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{-2x}{1 + 2x^2} \\ x - \frac{4x}{(1 + 2x^2)} + \frac{8x^3}{(1 + 2x^2)^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{-2x}{1 + 2x^2} \\ \frac{-3x + 4x^3 + 4x^5}{(1 + x^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{-2x}{1 + 2x^2} \\ -3x + 4x^3 + 4x^5 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Alors, en notant  $x^2 = z$ ,

$$-3x + 4x^3 + 4x^5 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x^4 + 4x^2 - 3 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4z^2 + 4z - 3 = 0.$$

Le discriminant du polynôme  $4x^2 + 4X - 3$  vaut  $\Delta = 16 + 48 = 64$ , donc ses racines sont

$$r_1 = \frac{-4 - 8}{8} = -\frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2}.$$



Ainsi

$$-3x + 4x^3 + 4x^5 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = -\frac{3}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{1}{2} \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} y = \frac{-2x}{1+2x^2} \\ x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les trois points critiques de la fonction  $F$  sont donc  $(0, 0)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

33. On a  $F(0, 0) = \frac{3}{4}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} F(x, x) - F(0, 0) &= \frac{3}{4} + \frac{x^2 + 4x^2 + x^2}{2} + x^4 - \frac{3}{4} = x^4 + 3x^2, \\ F(x, -x) - F(0, 0) &= \frac{3}{4} + \frac{x^2 - 4x^2 + x^2}{2} + x^4 - \frac{3}{4} = x^4 - x^2. \end{aligned}$$

34. Soit  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ . D'une part,

$$x^4 + 3x^2 > 0, \quad F(x, x) > F(0, 0).$$

D'autre part,

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0, \quad F(x, -x) < F(0, 0).$$

On en déduit qu'il n'existe par de voisinage de  $(0, 0)$  sur lequel  $F$  est toujours supérieure (ou toujours inférieure) à  $F(0, 0)$ . Ainsi le point  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local de la fonction  $F$ .

### Partie III – Intégrale dépendant d'un paramètre

35. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $s_x : t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc l'intégrale étudiée admet une unique borne incertaine qui est  $+\infty$ . Or, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$|s_x(t)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leq e^{-t^2}.$$

Or d'après la question 25, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge. Les fonctions  $s_x$  et  $t \mapsto e^{-t^2}$  étant positives et continues sur  $[0, +\infty[$ , d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |s_x(t)| dt$  converge. Donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} s_x(t) dt$  converge absolument, donc converge. De même, la fonction  $c_x : t \mapsto t \cos(xt)e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$|c_x(t)| = t|\cos(xt)|e^{-t^2} \leq te^{-t^2}.$$

Or, toujours d'après la question 25, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$  converge. Les fonctions  $c_x$  et  $t \mapsto te^{-t^2}$  étant positives et continues sur  $[0, +\infty[$ , d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |c_x(t)| dt$  converge. Donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} c_x(t) dt$  converge absolument, donc converge.

36. Soit  $a, x \in \mathbb{R}$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x] \cup [x, a])$ . Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

37. Soit  $a, \lambda \in \mathbb{R}$ . D'après la formule précédente appliquée à  $f = \sin \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et  $x = \lambda + a$ , on a

$$\sin(\lambda + a) = \sin a + \lambda \cos a - \int_a^{a+\lambda} (\lambda + a - t) \sin(t) dt.$$

On a alors, pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |\sin(\lambda + a) - \sin a - \lambda \cos a| &= \left| - \int_a^{a+\lambda} (\lambda + a - t) \sin(t) dt \right| \leq \int_a^{a+\lambda} |(a + \lambda - t) \sin(t)| dt \\ &\leq \int_a^{a+\lambda} |a + \lambda - t| dt = \int_a^{a+\lambda} (a + \lambda - t) dt \stackrel{s=a+\lambda-t}{=} \int_\lambda^0 s ds \\ &\leq \int_0^\lambda s ds = \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

Si  $\lambda \leq 0$ , alors

$$\begin{aligned} |\sin(\lambda + a) - \sin a - \lambda \cos a| &= \left| - \int_a^{a+\lambda} (\lambda + a - t) \sin(t) dt \right| \leq \int_{a+\lambda}^a |(a + \lambda - t) \sin(t)| dt \\ &\leq \int_{a+\lambda}^a |a + \lambda - t| dt = \int_{a+\lambda}^a (t - a - \lambda) dt \stackrel{s=t-a-\lambda}{=} \int_0^{-\lambda} s ds = \frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien montré que

$$|\sin(\lambda + a) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

38. Soit  $x, h \in \mathbb{R}$ . Remarquons que les intégrales  $S(x+h)$ ,  $S(x)$  et  $C(x)$  sont toutes absolument convergentes, ce qui justifiera l'inégalité triangulaire par la suite. On a, par linéarité de l'intégrale généralisée,

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| &= \left| \frac{\int_0^{+\infty} \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt}{h} - \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin(xt+ht) - \sin(xt)}{h} - t \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(xt+ht) - \sin(xt) - th \cos(xt)}{h} \right| e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en appliquant la formule de la question 37 avec  $a = xt$  et  $\lambda = ht$ , on a

$$|\sin(xt+ht) - \sin(xt) - th \cos(xt)| \leq \frac{h^2 t^2}{2}.$$

D'où

$$0 \leq \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \frac{h^2 t^2}{2} e^{-t^2} dt = \frac{h}{4} I_2.$$

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{4} I_2 = 0$  donc, par le théorème des gendarmes,  $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| = 0$ . Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

39. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction  $S$ . Par définition,  $S$  est donc dérivable en  $x$  et on a  $S'(x) = C(x)$ . Ainsi  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $S' = C$ .

40. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}_+$ . Les fonctions  $t \mapsto \cos(xt)$  et  $t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, y]$  donc, par intégration par parties,

$$\int_0^y t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \left[ -\cos(xt) \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^y - \int_0^y \frac{x}{2} \sin(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{\cos(xy) e^{-y^2}}{2} - \frac{x}{2} \int_0^y \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

Or

$$\left| \frac{\cos(xy) e^{-y^2}}{2} \right| \leq \frac{e^{-y^2}}{2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos(xy) e^{-y^2}}{2} = 0$ . Donc en passant à la limite quand  $y \rightarrow +\infty$  dans l'égalité obtenue, on a

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

41. D'après les questions 39 et 41, la fonction  $S$  vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

Donc  $S$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2} y = \frac{1}{2}. \tag{E}$$

42. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, non-homogène et à coefficients non-constants. Résolvons d'abord l'équation différentielle homogène associée :

$$y' + \frac{x}{2} y = 0. \tag{E_0}$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ , donc l'ensemble des solutions de (E<sub>0</sub>) sur  $\mathbb{R}$  est

$$\text{Sol}_{\mathbb{R}}(E_0) = \left\{ x \mapsto C e^{-x^2/4} / C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On va maintenant trouver une solution particulière de (E) par variation de la constante. Soit  $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et posons  $y : x \mapsto C(x) e^{-x^2/4}$ . Alors  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y'(x) = C'(x) e^{-x^2/4} - \frac{x}{2} C(x) e^{-x^2/4}.$$

Alors

$$y \in \text{Sol}_{\mathbb{R}}(E) \iff y'(x) + \frac{x}{2} y(x) = \frac{1}{2} \iff C'(x) e^{-x^2/4} = \frac{1}{2} \iff C'(x) = \frac{1}{2} e^{x^2/4}.$$

Or d'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2/4}$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt$ .

La fonction  $y_p : x \mapsto e^{-x^2/4} \int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt$  est alors une solution particulière de (E), et donc

$$\text{Sol}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto C e^{-x^2/4} + e^{-x^2/4} \int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt / C \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'après la question précédente,  $S \in \text{Sol}_{\mathbb{R}}(E)$  donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = C e^{-x^2/4} + e^{-x^2/4} \int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt.$$

En évaluant l'égalité précédente en  $x = 0$ , on a alors

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0 \times t) e^{-t^2} dt = 0 = C + 0.$$

Donc  $C = 0$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = e^{-x^2/4} \int_0^x \frac{e^{t^2/4}}{2} dt.$$