CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PROBLEME I – DES APPROXIMATIONS DE π

Présentation et objectifs

On s'intéresse dans ce problème à la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On cherche ensuite à obtenir, par deux méthodes, des approximations de π à l'aide de séries numériques.

Partie A – Questions préliminaires

I.A.1. Soient q un réel et n un entier naturel. Rappeler, sans preuve, une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?

I.A.2. Soit α un réel. Donner, sans justification, une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ soit convergente.

I.A.3. On rappelle que la notation Arctan désigne la fonction Arctangente.
Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction Arctan, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et son tableau de variation, qui fera apparaître les limites.

Partie B – Etude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

I.B.1. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est-elle absolument convergente ? On justifiera la réponse.

I.B.2. Pour tout entier naturel k, calculer le réel I_k défini par $I_k = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

Calculer aussi l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

I.B.3. Soit n un entier naturel. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$, puis en utilisant la question **I.A.1.**, en déduire que

$$S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

I.B.4. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

I.B.5. A l'aide des trois questions précédentes, montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Partie C – Un procédé élémentaire d'approximation de π

I.C.1. Démontrer, à l'aide de la partie **B**, que pour tout entier naturel n,

$$\left|4S_n - \pi\right| \leqslant \frac{4}{2n+3}.$$

I.C.2. Déterminer, par un calcul ou à l'aide de votre calculatrice, le plus petit entier naturel N tel que

$$\frac{4}{2N+3} \leqslant 10^{-6}.$$

I.C.3. Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près à l'aide des questions précédentes. On ne demande pas dans cette question de déterminer une telle approximation.

Partie D – Un autre procédé d'approximation de π

I.D.1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et en préciser le rayon de convergence. En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

On indiquera le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses.

I.D.2. Calculer la valeur exacte de $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Exprimer, en utilisant la question **I.D.1.**, le réel $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ comme somme d'une série numérique. En déduire que

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

I.D.3. Pour tout entier naturel n, on note $T_n = 2\sqrt{3} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$ et on **admet** que pour tout entier naturel n

$$\left|T_n - \pi\right| \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}.$$

Déterminer, en expliquant votre démarche, le plus petit entier naturel N' tel que

$$\frac{2\sqrt{3}}{(2N'+3)3^{N'+1}} \leqslant 10^{-6}.$$

Que constatez-vous ? On comparera l'efficacité des deux méthodes d'approximation de π proposées dans ce problème.

I.D.4. Donner une valeur approchée de $T_{N'}$ en faisant figurer sept décimales après la virgule.

PROBLEME II – LOCALISATION DES VALEURS PROPRES

Objectifs et notations

Le but de ce problème est d'introduire, dans le cadre des matrices 3×3 à coefficients complexes, la notion de matrices à diagonale strictement dominante, pour en déduire un théorème de localisation des valeurs propres, appelé théorème de Gerschgorin.

Si $z = a + \mathrm{i}b$ est un nombre complexe, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le module de z est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lorsque z est un nombre réel, alors $|z|$ désigne sa valeur absolue (qui coïncide alors avec son module).

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
A chaque complexe $z = a + \mathrm{i}b$, on associe le point A de $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b). On dit que A est le point d'affixe z et on le notera $A(z)$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées à 3 lignes et 3 colonnes à coefficients complexes et I la matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit que la matrice

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est à **diagonale strictement dominante** si les trois inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} |m_{1,1}| & > & |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \\ |m_{2,2}| & > & |m_{2,1}| + |m_{2,3}| \\ |m_{3,3}| & > & |m_{3,1}| + |m_{3,2}| \end{cases}.$$

Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

est à diagonale strictement dominante car $|-3| > |-1| + |1|$ et $|2| > |0| + |1|$ et $|-4| > |-1| + |2|$.

Partie A – Le théorème d'Hadamard dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

On se propose, dans cette partie, de démontrer le résultat suivant :

Théorème d'Hadamard : "Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante, alors M est inversible."

II.A.1. On considère dans cette question les trois matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 2 & 0 \\ 3\mathrm{i} & 1 & 3+4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

II.A.1.a) Déterminer si les matrices A, B et C sont à diagonale strictement dominante.

II.A.1.b) Montrer que les matrices A, B et C sont inversibles.

II.A.1.c) La réciproque du théorème d'Hadamard est-elle vraie ?

II.A.2. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}$ une matrice non inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

II.A.2.a) Justifier qu'il existe un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^3$ non nul tel que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.A.2.b) En déduire qu'on a les relations :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 & = & -\,m_{1,2}x_2 - m_{1,3}x_3 \\ m_{2,2}x_2 & = & -\,m_{2,1}x_1 - m_{2,3}x_3 \\ m_{3,3}x_3 & = & -\,m_{3,1}x_1 - m_{3,2}x_2 \end{cases}.$$

II.A.2.c) Soit $k \in \{1,2,3\}$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}$. Justifier que le nombre complexe x_k est non nul.

II.A.2.d) On suppose par exemple que $k = 1$, c'est-à-dire que $\mathrm{Max}\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\} = |x_1|$.
Montrer alors que $m_{1,1} = -\,m_{1,2}\dfrac{x_2}{x_1} - m_{1,3}\dfrac{x_3}{x_1}$ puis que $|m_{1,1}| \leqslant |m_{1,2}| + |m_{1,3}|$.
Ecrire sans justification une inégalité analogue dans le cas où on aurait $k = 2$ ou $k = 3$.

II.A.2.e) Conclure.

Partie B – Localisation des valeurs propres

Soit ω un nombre complexe et soit $r \in \mathbb{R}^+$. On rappelle que l'ensemble

$$\{A(z) \in \mathcal{P} \quad / \quad |z-\omega| \leqslant r\}$$

est le disque fermé ayant pour centre le point d'affixe ω et de rayon r. Par la suite, on notera ce disque $D(\omega, r)$.

A la matrice $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on associe les trois disques $D_1 = D(m_{1,1}, r_1)$, $D_2 = D(m_{2,2}, r_2)$ et $D_3 = D(m_{3,3}, r_3)$ avec

$$\begin{cases} r_1 &= |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \\ r_2 &= |m_{2,1}| + |m_{2,3}| \\ r_3 &= |m_{3,1}| + |m_{3,2}| \end{cases}.$$

Les disques D_1, D_2 et D_3 sont appelés les disques de Gerschgorin.

On considère les matrices :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & -1 & -1+2\mathrm{i} \\ 2 & 2+\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.B.1. Dans cette question, on s'intéresse à la matrice E.

II.B.1.a) Représenter dans le plan complexe les trois disques D_1, D_2 et D_3 de Gerschgorin de la matrice E.

II.B.1.b) Déterminer, sans justification, l'ensemble $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.1.c) Déterminer les valeurs propres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 de E et représenter les points d'affixes λ_1, λ_2 et λ_3 sur le schéma de la question **II.B.1.a)**

II.B.1.d) Montrer que les points d'affixes λ_1, λ_2 et λ_3 appartiennent à l'union $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.2. Dans cette question, on s'intéresse à la matrice F.

II.B.2.a) On note $P_F(X) = \det(X.I - F)$ le polynôme caractéristique de la matrice F. Montrer que

$$P_F(X) = (X-1)\left[X^2 - (1+2\mathrm{i})X - 1 + \mathrm{i}\right].$$

On détaillera les calculs.

II.B.2.b) Déterminer les valeurs propres complexes μ_1, μ_2 et μ_3 de F.

II.B.2.c) Représenter dans le plan complexe les trois disques de Gerschgorin D_1, D_2 et D_3 associés à la matrice F ainsi que les points d'affixes μ_1, μ_2 et μ_3.

II.B.2.d) Montrer que les points d'affixes μ_1, μ_2 et μ_3 appartiennent à l'union $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.3. On se propose dans cette question de démontrer le résultat suivant, appelé théorème de Gerschgorin :

"Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Pour toute valeur propre complexe λ de M, le point d'affixe λ appartient à l'union des trois disques de Gerschgorin associés à M."

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note D_1, D_2 et D_3 les trois disques de Gerschgorin associés à M.

II.B.3.a) Soit λ un complexe. Donner la définition de "λ est une valeur propre de M" sans utiliser la notion de déterminant.

II.B.3.b) Expliciter les coefficients de la matrice $M - \lambda.I$.

II.B.3.c) Montrer à l'aide du théorème d'Hadamard que, si λ est une valeur propre de M, on a l'une des inégalités :

$$\begin{array}{ccc} |m_{1,1}-\lambda| & \leqslant & |m_{1,2}|+|m_{1,3}| \\ & \text{ou} & \\ |m_{2,2}-\lambda| & \leqslant & |m_{2,1}|+|m_{2,3}| \\ & \text{ou} & \\ |m_{3,3}-\lambda| & \leqslant & |m_{3,1}|+|m_{3,2}| \end{array}.$$

II.B.3.d) Prouver alors le théorème de Gerschgorin.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1325 – D'après documents fournis