CCP-2015 – filière TSI
Un corrigé

I Problème — Approximations de π

Partie A – Questions préliminaires

I.A.1. Somme géométrique si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si $q = 1$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1^0 + \ldots + 1^n = n+1$$

I.A.2. Somme de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

I.A.3. Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, y est $\mathcal{C}^{+\infty}$ et sa fonction dérivée est : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Son tableau de variation est :

$$\begin{array}{c|lcr} & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & \pi/2 \\ f & & \nearrow & \\ & -\pi/2 & & \end{array}$$

Partie B – Etude de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

I.B.1. Comme $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \dfrac{1}{2n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente (par comparaison avec une série de Riemann), la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument convergente.

I.B.2. $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

I.B.3.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t \qquad (1) \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \frac{(-1)^n \int_0^1 t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(1) l'interversion de la sommation et de l'intégrale ne pose aucun problème car la somme est finie et de fonctions continues.

I.B.4. Pour tout $t \in [0;1]$: $1 \leq 1+t^2 \leq 2$ donc (par passage à l'inverse, et multiplication par t^{2n+2} qui est positif) :

$$\frac{t^{2n+2}}{2} \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \frac{t^{2n+2}}{1} \qquad \forall t \in [0;1]$$

donc (par positivité de l'intégrale) :

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+2+1} = \frac{1}{2n+3}$$

On peut donc conclure, par le théorème des gendarmes, que la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

I.B.5. Or d'après les questions précédentes :

$$\left|S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc (S_n) est convergente et de limite $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Partie C – Un procédé élémentaire d'approximation de π

I.C.1. A l'aide des questions 3 et 4 de la partie précédente, on affirme que :

$$\left|S_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}$$

En multipliant par 4 :

$$|4S_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}$$

I.C.2. $\dfrac{4}{2N+3} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \dfrac{4}{10^{-6}} \leq 2N+3 \Leftrightarrow 2\cdot 10^6 - \dfrac{3}{2} \leq N$

Donc cette inégalité est vraie pour tout entier N à partir de 1 999 999.

I.C.3. Il est donc certain que la distance entre $4S_{10^6}$ et π est inférieure à 10^{-6}, ce qui procure l'approximation demandée.

Partie D – Un procédé procédé d'approximation de π

I.D.1. On sait que :

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n\geq 0} q^n \qquad \forall q \in]-1;1[$$

A l'aide du changement de variable $q = -x^2$ où $x \in]-1;1[$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$$

de rayon de convergence 1. Par le théorème d'intégration d'une fonction développable en série entière :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'un série entière de terme général (a_n) avec un rayon de convergence $R > 0$ alors, en notant F la primitive de F s'annulant en 0 :

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in]-R;R[$$

Comme Arctan est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ s'annulant en 0, on en déduit que :

$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

I.D.2. Comme $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ ainsi :

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}$$

Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\pi = 6\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \times \frac{1}{3^n\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

I.D.3. On peut implémenter l'algorithme suivant :

```
## initialisation
N ← 0
P ← 3
U ← 2√3/((2N + 3) × P)
ϵ ← 10^-6
## traitement
tant que U > ϵ faire :
        N ← N + 1
        P ← P × 3
        U ← 2√3/((2N + 3) × P)
## sortie
Afficher N
```

On constate que ce plus entier est 10. L'efficacité, par rapport à la partie précédente est évidente.

I.D.4. $T_{10} = 0,850215435 \times 10^{-6}$

II Problème — Localisation des valeurs propres

Partie A – Le théorème d'Hadamard dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

II.A.1.a) A est évidemment à diagonale strictement dominante, B ne l'est pas. En observant que $|3+4\mathrm{i}| = 5$, C est aussi à diagonale strictement dominante.

II.A.1.b) Le rang d'une matrice est invariant par combinaison linéaire sur les colonnes, or :

les opérations $\begin{cases} C_1 \leftarrow 2C_1 + C_3 \\ C_1 \leftarrow 3C_1 + C_2 \end{cases}$ sur A donne : $\begin{pmatrix} 14 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 donc A est inversible ;

les opérations $\begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_1 \leftarrow 4C_1 - 3C_2 \end{cases}$ sur B donne : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 donc B est inversible ;

les opérations $\begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - (1+\mathrm{i})C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2\mathrm{i}C_2 \end{cases}$ sur C donne : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-6\mathrm{i} & 1 & 3+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 donc C est inversible ;

II.A.1.c) Le contre exemple de la matrice B, justifie que la réciproque du théorème d'Hadamard est fausse.

II.A.2.a) Si M est non inversible alors son noyau n'est pas réduit à 0, il contient donc un vecteur non nul X. Ce qui montre la question.

II.A.2.b)

$$MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 = 0 \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 = 0 \\ m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_{1,1}x_1 = -m_{1,2}x_2 - m_{1,3}x_3 \\ m_{2,2}x_2 = -m_{2,1}x_1 - m_{2,3}x_3 \\ m_{3,3}x_3 = -m_{3,1}x_1 - m_{3,2}x_2 \end{cases}$$

II.A.2.c) X étant non nul, il possède (au moins) une coordonnées non nulle, donc le maximum, en valeur absolue, de ses coordonnées est non nul.

II.A.2.d) Si $|x_1| = \text{Max}\{|x_1|, |x_2|, |x_2|\}$ alors $x_1 \neq 0$ ainsi, par division : $m_{1,1} = -m_{1,2}\dfrac{x_2}{x_1} - m_{1,3}\dfrac{x_3}{x_1}$

Comme $\left|\dfrac{x_i}{x_1}\right| \leq 1$ pour $i = 2$ ou $i = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} |m_{1,1}| &= \left|-m_{1,2}\frac{x_2}{x_1} - m_{1,3}\frac{x_3}{x_1}\right| \\ &\leq \left|m_{1,2}\frac{x_2}{x_1}\right| + \left|m_{1,3}\frac{x_3}{x_1}\right| \\ &\leq |m_{1,2}|.\left|\frac{x_2}{x_1}\right| + |m_{1,3}|.\left|\frac{x_3}{x_1}\right| \\ &\leq |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \end{aligned}$$

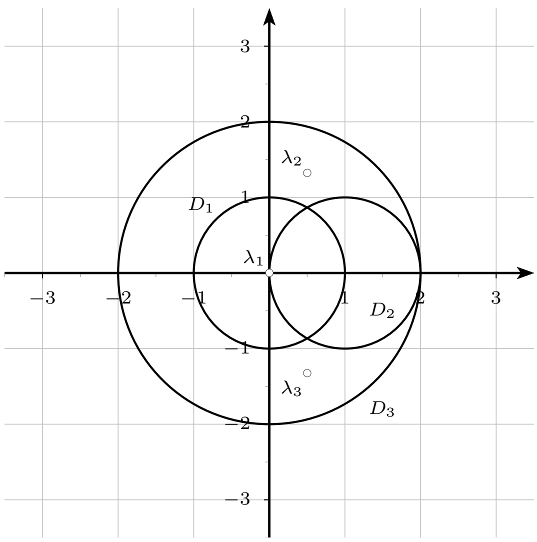
Si $k = 2$ alors on en déduira que $|m_{2,2}| \leq |m_{2,1}| + |m_{2,3}|$; et si $k = 3$ alors on en déduira que $|m_{3,3}| \leq |m_{3,1}| + |m_{3,2}|$

II.A.2.e) Conclusion, si M n'est pas inversible alors une des trois inégalités précédentes est vrai, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : "M est à diagonale strictement dominante".
Donc une matrice ne peut être à la fois "à diagonale strictement dominante" et "non inversible", ce qui prouve le théorème d'Hadamard.

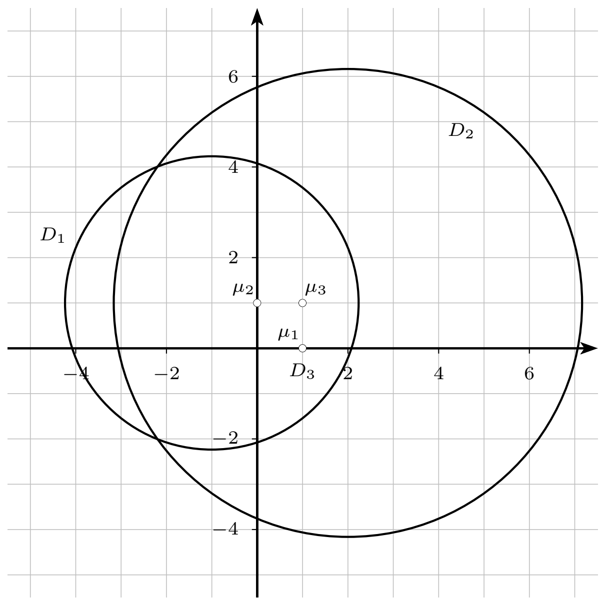
Partie B – Localisation des valeurs propres

II.B.1.a) Disques de Gerschgorin :

de E :



de F :



II.B.1.b) $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_3$

II.B.1.c) Polynôme caractéristique de E : $P_E(X) = \det(X.I_3 - E) = X \times [(X-1)\times X - 2\times(-1)] = X(X^2 - X + 2)$
Dont les racines sont $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2}$. (Donc E est diagonalisable sur $\mathbb{C}$)

II.B.1.d) Comme $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}$, qui est inférieur à 2, donc λ_2 et λ_3 sont dans D_3, tout comme λ_1.

II.B.2.a) $P_F(X) = \begin{vmatrix} X+1-\mathrm{i} & 1 & 1-2\mathrm{i} \\ -2 & X-2-\mathrm{i} & -1+3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\times \begin{vmatrix} X+1-\mathrm{i} & 1 \\ -2 & X-2-\mathrm{i} \end{vmatrix}$

Donc :

$$\begin{aligned} P_F(X) &= (X-1)\left[(X+1-\mathrm{i})(X-2-\mathrm{i})-(-2)\right] \\ &= (X-1)\left(X^2+(1-\mathrm{i}-2-\mathrm{i})X+(1-\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})-(-2)\right) \\ &= (X-1)\left(X^2+(-1-2\mathrm{i})X-2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-1+2\right) \\ &= (X-1)\left(X^2-(1+2\mathrm{i})X+\mathrm{i}-1\right) \end{aligned}$$

II.B.2.b) Les valeurs propres de F sont $\mu_1 = 1$ et :
on résout $X^2-(1+2\mathrm{i})X+\mathrm{i}-1=0$, de discriminant : $\Delta = (1+2\mathrm{i})^2) - 4(\mathrm{i}-1) = 1$, d'où :
$\mu_2 = \ldots = \mathrm{i}$ et $\mu_3 = \ldots = 1+\mathrm{i}$ (Donc F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$)

II.B.2.c) (voir plus haut : par exemple $D_1 = D(-1+\mathrm{i}, 1+\sqrt{5})$)

II.B.2.d) Pour démontrer que $\mu_k \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (pour tout $k \in \{1,2,3\}$), il suffit de démontrer qu'ils sont dans D_1. Comme :

$$\begin{aligned} |\mu_1 - m_{1,1}| &= |2-\mathrm{i}| = \sqrt{5} < 1+\sqrt{5} \\ |\mu_2 - m_{1,1}| &= |1| < 1+\sqrt{5} \\ |\mu_3 - m_{1,1}| &= |2| < 1+\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ce qui montre la question.

II.B.3.a) λ est une valeur propre de $M \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe $X \in \mathbb{C}^3$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

II.B.3.b) La matrice $M - \lambda I_3$ est de coefficients : $\begin{pmatrix} m_{1,1}-\lambda & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2}-\lambda & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}-\lambda \end{pmatrix}$

II.B.3.c) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ alors $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible donc, d'après le théorème d'Hadamard, au moins un de ses coefficients diagonaux n'est pas dominant, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} |m_{1,1}-\lambda| & \leq & |m_{1,2}|+|m_{1,3}| \\ & \text{ou} & \\ |m_{2,2}-\lambda| & \leq & |m_{2,1}|+|m_{2,3}| \\ & \text{ou} & \\ |m_{3,3}-\lambda| & \leq & |m_{3,1}|+|m_{3,2}| \end{array}$$

II.B.3.d) On peut en déduire que λ est dans un des disque de Gerschgorin et donc : $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$