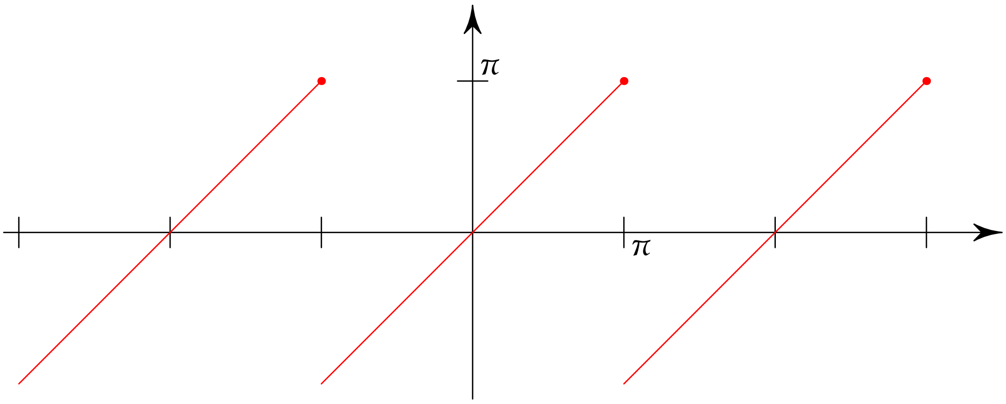
I. Calcul d'une série

1. Graphe de g

Voilà le graphe demandé sur $]-3\pi, 3\pi]$.



2. Coefficients de Fourier pairs

La fonction étant impaire à une valeur près par période, les coefficients de Fourier pairs, les a_n pour $n \in \mathbb{N}$, sont nuls.

3. Coefficients de Fourier impairs

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} g(x)\sin(n\omega x)\,dx$.
Ici, la période est 2π, et, compte tenu de la presque imparité, on peut travailler sur $[0,\pi]$.
Ce qui donne : $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx$.
On traite bien sûr cette intégrale par partie, en dérivant le x et en primitivant le sinus, ce qui donne :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

4. Convergence de la série de Fourier

g est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, périodique.
Sa série de Fourier converge donc en tout point vers la demi somme des limites à droite et à gauche en ce point.
Donc, partout où g est continue, c'est à dire pour $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a : $S(x) = g(x)$.
En ces points particuliers, la somme de la série de Fourier est nulle, et la fonction vaut π, il n'y a donc pas égalité.
Finalement, $S(x) = g(x)$ si et seulement $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Égalite de Parseval

On a bien sûr aussi g de classe $\mathscr{C}^0$ par morceaux, périodique, on peut donc appliquer le théorème de Parseval.
En utilisant le bon a_0, et non pas celui de l'énoncé, on a, toujours en travaillant sur $[0,\pi]$ par presque imparité :

$$\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} g^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Avec : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} g^2(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g^2(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\,dx = \dfrac{\pi^2}{3}$

Et aussi : $a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4}{n^2} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$

On en conclut facilement : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

II. Régularité de f

1. Développement limité

On a dans le cours : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

2. Continuité

On en déduit au voisinage de 0 :

$f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ qui tend bien vers $f(0) = 1$ quand x tend vers 0.
f est bien continue en 0.

3. Dérivabilité

On calcule le taux d'accroissement au voisinage de 0 : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{x}{2} + o(x)}{x} = \dfrac{1}{2} + o(1)$

qui tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

f est donc dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4. Dérivée usuelle

Sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on applique les règles de dérivation usuelle d'un quotient et du logarithme.

Ce qui donne : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)}{x^2} = \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}$.

5. Classe de f

On utilise maintenant de nouveau le développement limité :

$$f'(x) = \frac{x + (1-x)\left(-x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2(1-x)} = \frac{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\dfrac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$$

qui tend bien vers $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

f' est donc continue en 0, donc f, continue, est donc de $\mathscr{C}^1$ en 0.
Comme elle l'est aussi par fonctions usuelles sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

III. Développement en série entière

1. Dérivée

1.a. L est une primitive de f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$, donc, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, 1[$, donc sur $[-1, 1[$.

1.b. Et, bien sûr : $L'(x) = f(x)$.

2. Développement en série entière

2.a. Dans le cours : $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1, 1[$.

On en déduit : $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1, 1[$.

2.b. Toujours sur le même intervalle, avec, en plus, $x \neq 0$, on a :

$f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

La somme de cette série entière est 1 en 0, comme $f(0)$, on a donc : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ sur $]-1,1[$.

3. Prolongement par continuité

3.a. On peut primitiver une série entière terme à terme sur l'ouvert de convergence, et $L(0) = 0$,

on a donc : $L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sur $]-1,1[$.

3.b. Pour $x = -1$, la série entière précédente converge (absolument) par critère de Riemann, donc converge.

La somme de cette série entière est donc continue à droite en -1.

De même, L est définie et continue à droite en -1.

Elles sont égales sur $]-1,0]$, par unicité de la limite, elles sont égales en -1.

3.c. Pour $x = 1$, la série entière précédente converge (absolument) par critère de Riemann, donc converge.

La somme de la série entière est donc définie et continue à gauche en 1, de plus, L et la série entière sont égales sur $[0,1[$.

L est donc prolongeable par continuité à droite en 1, de valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3.d. On a donc $L(x)$ qui tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand x tend à gauche vers 1.

Ceci est une limite finie, et, par définition de la convergence d'une intégrale généralisée,

$\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

4. Première application

4.a. $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx$

$x \mapsto h(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$, on a une double singularité en 0 et en $+\infty$.

Étude en 0

$h(x) = \frac{x}{1 + x + \mathrm{o}(x) - 1} = \frac{x}{x + \mathrm{o}(x)} = \frac{1}{1 + \mathrm{o}(1)}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0,

h a donc une limite finie en un point fini, son intégrale converge en ce point.

Étude en $+\infty$

La fonction est positive, $h(x) \sim \frac{x}{\mathrm{e}^x} = x\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x/2} \times \mathrm{e}^{-x/2} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$ pour x assez grand.

Comme l'intégrale de cette exponentielle converge en $+\infty$, celle de h converge aussi, par équivalence et comparaison de fonctions positives.

4.b. On fait le changement de variable indiqué qui est bien monotone de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Signalons tout de suite que l'intégrale du départ et l'intégrale obtenue vont être de même nature, donc ici convergentes, et donc égales.

Ainsi, on écrira directement cette égalité !

$t = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ donne $x = -\ln(1-t)$ et donc $dx = \frac{1}{1-t}\,dt$.

x tend vers 0 donne t tend vers 0, tandis que x tend vers $+\infty$ donne t tend vers 1.

On a donc : $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{\frac{1}{1-t} - 1} \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = \frac{\pi^2}{6}$

5. Deuxième application

5.a. L a bien été prolongée par continuité sur $[-1,1]$.

On pose $h(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$, qui est continue sur $[-1,1]$.

On dérive h sur $]-1,0[\cup]0,1[$, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle sur cet intervalle pour montrer que h est constante sur $[-1,1]$.

$h'(x) = L'(x) - L'(-x) - x\,L'(x^2) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} + x\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \dfrac{-\ln(1-x)-\ln(1+x)+\ln(1-x^2)}{x} = 0.$

h est donc constante sur $[-1,1]$, et comme $h(0)=0$, on a : $h(x)=0$ sur $[-1,1]$.

5.b. L'égalité pour $x=1$ donne : $L(1)+L(-1) = \dfrac{1}{2}L(1)$, donc : $L(-1) = -\dfrac{1}{2}L(1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

IV. Résolution d'une équation différentielle

1. Équation homogène associée

1.a. l'équation différentielle $xz'+z=0$ est linéaire du premier ordre sans second membre. Sur un intervalle ne contenant pas 0, les solutions sont de la forme : $z = A\exp(-\int \frac{1}{x}\,dx) = A\exp(-\ln|x|) = \dfrac{A}{|x|}$.

Quitte à changer A, qui est arbitraire, en $-A$ sur un intervalle où $x<0$, la solution générale de l'équation homogène sur K est donc de la forme : $z(x) = \dfrac{A}{x}$.

1.b. Le résultat demandé revient à montrer que f est solution (particulière) de $xz'+z = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ et sur $]0,1[$.

On a déjà calculé sur ces intervalles : $f'(x) = \dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}$.

Donc : $x\,f'(x)+f(x) = \dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)} - \dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{1}{1-x}$.

La solution générale de $xz'+z = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$ est donc : $z(x) = f(x) + \dfrac{A}{x}$.

2. Équation avec second membre

La solution générale de $xy''+y' = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$ est donc une primitive arbitraire des précédentes.
Rappelons que sur les intervalles indiqués, L est une primitive de f.
On a donc : $y = L(x) + A\ln|x| + B$, solution générale de $xy''+y' = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,0[$ ou sur $]0,1[$.

3. Recollement de solutions

3.a. Sur $[-1,0[$, on a : $y = L(x) + A_1\ln(-x) + B_1$, tandis que sur $]0,1[$, on a : $y = L(x) + A_2\ln(x) + B_2$.
Les intervalles sont différents, donc les constantes aussi !

3.b. Comme y est solution sur $[-1,1[$, elle est définie et continue en 0, ce qui entraîne $A_1 = A_2 = 0$ pour que les limites (finies) existent.
Ainsi, sur $[-1,0[$, on a : $y = L(x)+B_1$, tandis que sur $]0,1[$, on a : $y = L(x)+B_2$, ce qui entraîne $B_1 = B_2$, qu'on note B, pour que ces limites (finies) soient égales.,
Finalement, si y est solution sur $[-1,1[$, alors, nécessairement : $y = L(x)+B$.

3.c. Il suffit maintenant de montrer que $x \mapsto L(x)+B$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1[$, ce qui est vrai puisque L l'est !
Finalement, les solutions de $xy''+y' = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1,1[$ sont : $y = L(x)+B$.