Partie A : un arc de cercle apparent

1. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation : $x^2+y^2=1$ clairement vérifiée par les coordonnées du point $\mathrm{M}(\theta)$.

2. (a) On a $a\in]1,+\infty[$, donc, $\dfrac{1}{a}\in]0,1[$ et enfin : $\omega=\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{a}\right)\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (b) Bien évidemment : $\overrightarrow{\mathrm{OM}(\omega)}:\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{\mathrm{AM}(\omega)}=\overrightarrow{\mathrm{OM}(\omega)}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}:\begin{pmatrix}\cos(\omega)-a\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}$.

   (c) $\omega=\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{a}\right)$ donne toujours : $\dfrac{1}{a}=\cos(\omega)$, avec ici $\cos(\omega)\neq 0$, et donc : $a=\dfrac{1}{\cos(\omega)}$.

   (d) $\overrightarrow{\mathrm{OM}(\omega)}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}(\omega)}=\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega)-a\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}=\cos^2(\omega)-a\cos(\omega)+\sin^2(\omega)=0$

   Comme $\mathrm{M}(\omega)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et que $\mathrm{A}\neq\mathrm{M}(\omega)$, la droite $(\mathrm{AM}(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3. (a) $a>1$, donc le dénominateur ne s'annule jamais, par théorèmes usuels, f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Le numérateur est impair et le dénominateur pair, f est impaire. De plus, elle est 2π-périodique.

   (c) On dérive f comme un quotient : $f'(x)=\dfrac{\cos(x)(\cos(x)-a)+\sin^2(x)}{(\cos(x)-a)^2}=\dfrac{1-a\cos(x)}{(\cos(x)-a)^2}$

   (d) f' ne s'annule que si $\cos(x)=\dfrac{1}{a}$, c'est à dire, sur $[0,\pi]$, que pour $x=\omega$.
   f' est clairement strictement négative sur $[0,\omega[$ et strictement positive sur $]\omega,\pi]$.
   Donc f est strictement décroissante sur $[0,\omega]$ et strictement croissante sur $[\omega,\pi]$.

   (e) Attention, on est sur $[-\pi,\pi]$, il faut utiliser l'imparité de f.

   Ensuite, on obtient :

x	$-\pi$		$-\omega$		0		ω		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-f(\omega)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\omega)$	$\nearrow$	0

4. La droite verticale passant par A est d'équation : $x=a>1$ et ne coupe donc pas le cercle $\mathcal{C}$.
   Une droite non verticale est d'équation : $y=\alpha x+\beta$. Elle passe par A si et seulement si $\alpha a+\beta=0$.
   Une droite $\mathcal{D}$, non verticale, passant par A est donc d'équation : $y=\alpha(x-a)$ ou $y=m(x-a)$.
   Rien n'assure que cette droite coupe $\mathcal{C}$!

5. $\mathrm{M}(\theta)\in\mathcal{D}_m\Leftrightarrow\sin(\theta)=m(\cos(\theta)-a)\Leftrightarrow m=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-a}=f(\theta)$, le dénominateur est bien non nul !

6. $\mathrm{M}(0):\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}(\pi):\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ vérifient $y=0$ et sont donc sur $\mathcal{D}_0$.
   $-1<1$ donc $\mathrm{M}(0)$ est visible du point A, contrairement à $\mathrm{M}(\pi)$.

7. (a) Soit $m=f(\theta_1)=f(\theta_2)$, donc $\mathrm{M}(\theta_1)$ et $\mathrm{M}(\theta_2)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_m$, comme A,
   ces trois point sont donc alignés !

   (b) Comme $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\pi$, on a : $\cos(\theta_1\geqslant\cos\theta_2)$, donc $\mathrm{M}(\theta_1)$ est visible de A, contrairement à $\mathrm{M}(\theta_2)$.

   (c) f est décroissante puis croissante strictement sur $[0,\pi]$, le minimum est en ω.
   Comme $f(\theta_1)=f(\theta_2)$, on a donc $\theta_1<\omega<\theta_2$.

8. (a) Soit $0\leqslant\theta<\omega<\pi$, on considère $\theta'\in[0,\pi]$, $\theta'\neq\theta$, tel que $f(\theta)=f(\theta')$, alors $\theta'>\theta$, et donc $\cos(\theta)>\cos(\theta')$ et enfin $\mathrm{M}(\theta)$ visible de A.
   Si $\theta=\omega$, il n'y a pas d'autre point d'intersection de la droite et du cercle, donc $\mathrm{M}(\theta)$ visible de A.

   (b) Soit $0<\omega<\theta\leqslant\pi$, on considère $\theta'\in[0,\pi]$, $\theta'\neq\theta$, tel que $f(\theta)=f(\theta')$ alors $\theta'<\theta$, et donc $\cos(\theta)<\cos(\theta')$ et enfin $\mathrm{M}(\theta)$ n'est pas visible de A.

9. Pour $\theta\in[-\pi,0]$, si $\theta\geqslant-\omega$, $\cos(\theta)\geqslant\cos(\theta')$, et $\mathrm{M}(\theta)$ visible de A.
   Si $\theta<-\omega$, $\cos(\theta)<\cos(\theta')$, et $\mathrm{M}(\theta)$ n'est pas visible de A.

Partie B : un contour apparent d'une quadrique

1. On calcule le polynôme caractéristique de S : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}-\lambda\right)\left(\dfrac{3}{2}-\lambda\right)$

On a deux valeurs propres simples : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

2. (a) R est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, c'est à dire avec une matrice de passage orthogonale, qu'on appelle Ω ici.

On a donc une matrice diagonale D telle que : $D = \Omega^{-1} R \Omega = {}^t\Omega R \Omega$, puisque Ω est orthogonale.

(b) Compte tenu de ce qu'on a fait sur S, R a trois valeurs propres simples : 3, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

On a donc $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $\dfrac{1}{2}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $\dfrac{3}{2}$.

Pour avoir Ω, il suffit de normer ces vecteurs dans cet ordre : $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

3. L'équation de Σ est formée d'une forme quadratique constante égale à 1. S est la matrice de cette forme quadratique.

Dans la base orthonormale de vecteurs propres donnée, la forme quadratique vaut donc : $3X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2 + \dfrac{3}{2}Z^2$.

Dans le repère d'origine O utilisant cette base, Σ a pour équation : $3X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2 + \dfrac{3}{2}Z^2 = 1$.

Σ est donc un ellipsoïde.

4. (a) On a $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

(b) Dans le plan $\mathcal{P}$, l'équation de $\mathcal{E}$ revient à une forme quadratique constante.

La matrice de cette forme quadratique est S dont les valeurs propres sont simples : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.

Dans une base orthonormale de vecteurs propres on a donc $y^2 - yz + z^2 = \dfrac{1}{2}Y^2 + \dfrac{3}{2}Z^2$.

Dans le repère orthonormal de $\mathcal{P}$ de même origine, associé à ces vecteurs propres,

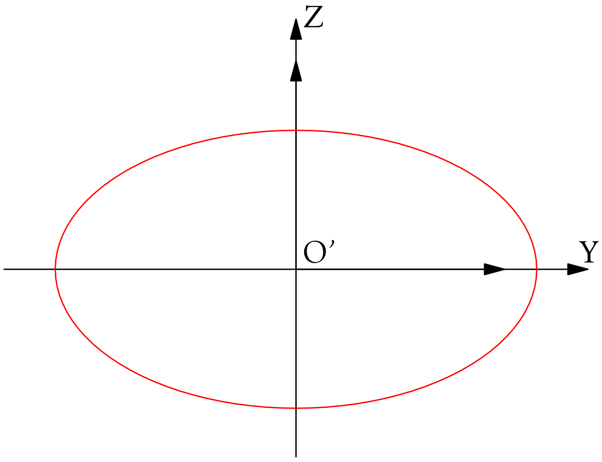
$\mathcal{E}$ a donc pour équation : $\dfrac{1}{2}Y^2 + \dfrac{3}{2}Z^2 = \dfrac{2}{3}$, ou encore : $\dfrac{3}{4}Y^2 + \dfrac{9}{4}Z^2 = 1$.

C'est donc une ellipse, ce qui n'est pas étonnant, l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan…

(c) On réécrit l'équation de $\mathcal{E}$: $\dfrac{X^2}{\frac{4}{3}} + \dfrac{Y^2}{\frac{4}{9}} = 1$.

Dans le repère $(O', \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, les sommets sont donc de coordonnées : $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ et $\left(0, \pm\dfrac{2}{3}\right)$.

La représentation graphique s'obtient facilement alors :



5. (a) $3x^2 = y^2 - yz + z^2$, pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, vaut bien 1. Donc $\mathrm{N} \in \Sigma$.

(b) Une représentation paramétrique de la droite (NA) et $\mathrm{N} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{NA}}$. C'est à dire : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

(c) On reporte cette représentation dans l'équation de Σ, on a donc : $3\lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 1$, ce qui donne $4\lambda^2 - 2\lambda = 0$, qui a pour solution $\lambda = 0$, c'est le point N et $\lambda = \dfrac{1}{2}$, c'est un point N'. Les abscisses respectives de ces points sont 0 et $\dfrac{1}{2}$, donc N n'est pas visible de A tandis que N' l'est.

6. Les coordonnées du gradient de φ en (u,v,w) s'obtiennent très facilement en calculant les dérivées partielles :
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_\varphi(u,v,w) : \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix}$

7. (a) $3x^2 + y^2 - yz + z^2$, pour $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = 1$. Donc $\mathrm{B} \in \Sigma$.

(b) Le plan tangent Π_B à Σ en B est normal au gradient et passe par B.

Les coordonnées du gradient en B sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Le plan tangent a donc pour équation : $2\left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \sqrt{2}\left(y - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sqrt{2}\left(z + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$

Ce qui s'écrit encore : $2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2$.

(c) Les coordonnées de A qui sont $(1,0,0)$ vérifient clairement cette équation, donc $\mathrm{A} \in \Pi_\mathrm{B}$, et enfin $\mathrm{B} \in \Gamma$.

8. On établit l'équation du plan tangent en T comme celui en B !
On obtient : $6u(x-u) + (2v-w)(y-v) + (-v+2w)(z-w) = 0$.
Ou encore : $6ux + (2v-w)y + (-v+2w)z - 6u^2 + 2v^2 - 2vw + 2w^2 = 6ux + (2v-w)y + (-v+2w)z - 2 = 0$, car $\mathrm{T} \in \Sigma$.
Π_T est bien d'équation $6ux + (2v-w)y + (-v+2w)z = 2$.

9. Le plan Π_T, tangent à Σ en T contient A si et seulement si $6u = 2$, ou encore $u = \dfrac{1}{3}$.

C'est à dire si et seulement si le point T vérifie $x = \dfrac{1}{3}$.
L'ensemble des points T est donc l'intersection de Σ et de $\mathcal{P}$, c'est tout simplement l'ellipse $\mathcal{E}$.