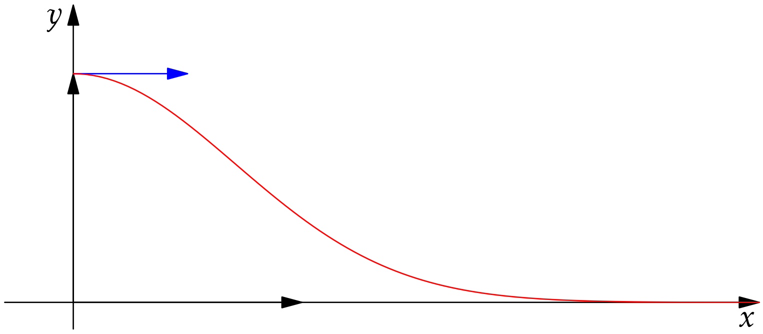
I Existence de F et I

1. **a.** On calcule facilement $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 0$. f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
   Tout aussi facilement $f(0) = 1$, et, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   On a donc le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

   b. $f'(0) = 0$, donc la demi tangente en $(0, 1)$ est horizontale.
   L'axe des x, d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.



2. F est la primitive de f qui s'annule en 0, comme f est continue, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
   On a aussi : $F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
3. C'est l'intégrale d'une fonction positive, on a une unique singularité de l'intégrale en $+\infty$.
   Pour $x \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

II Calcul de I : première méthode

1. On pose $g(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}$.
   g est définie et continue sur $[0, +\infty[\times[0, 1]$, sa dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ existe et est continue sur $[0, +\infty[\times[0, 1]$.
   Le théorème des intégrales simples à paramètres entraine alors l'existence et la classe $\mathscr{C}^1$ de G sur $[0, +\infty[$.
   De plus : $G'(x) = \displaystyle\int_0^1 -2x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$
2. **a.** On va calculer la dérivée de H.
   $H'(x) = 2F(x)F'(x) + G'(x) = 2f(x)F(x) + G'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$
   Dans la dernière intégrale, on pose $u = xt$, donc, $x\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, et on obtient :
   $H'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u2}\,\mathrm{d}u = 0.$
   H est bien constante sur $[0, +\infty[$.

   b. Donc, pour $x \in [0, +\infty[$, $H(x) = H(0) = F^2(0) + G(0) = 0 + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

3. **a.** $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est immédiat.

On a aussi pour les mêmes valeurs : $\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = e^{-x^2}\,\dfrac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2}$.

En intégrant ces inégalités entre 0 et 1, on a pour tout x positif : $0 \leqslant G(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 dt = e^{-x^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$

b. On a $I = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geqslant 0$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} F^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$, car la limite de $G(x)$ est nulle.

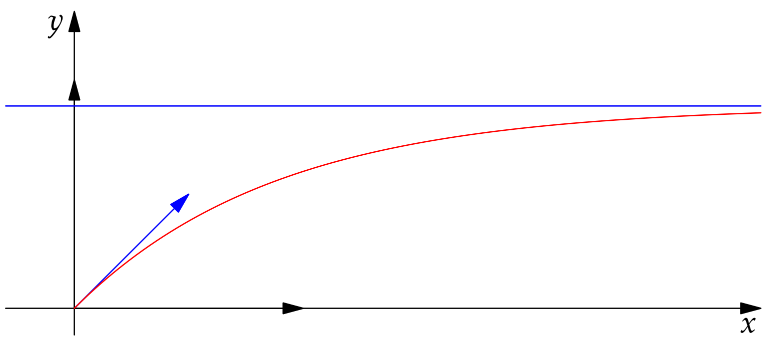
On en déduit facilement : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. $F'(x) \geqslant 0$, donc F est croissante sur $[0,+\infty[$.
$F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$, donc la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe en $(0,0)$.
La limite de $F(x)$ en $+\infty$ est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. La droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ est donc asymptote à la courbe.

On a donc le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	1	$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Il ne reste qu'à tracer l'allure de la courbe.

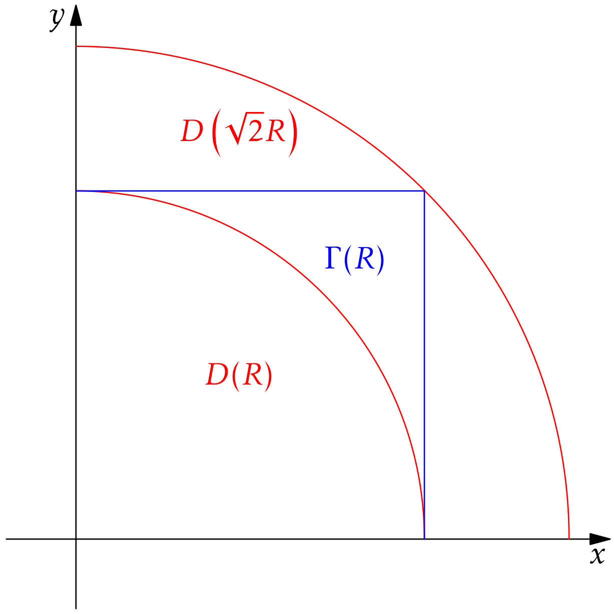


III Calcul de I : deuxième méthode

1. On a : $(x,y) \in D(R) \Leftrightarrow (\theta, r) \in [0,\pi/2]\times[0,r]$.
D'autre part, $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ et $x^2+y^2 = r^2$.
Ce qui donne : $J(R) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^R d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$

2. $K(R) = \displaystyle\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx = \int_0^R\int_0^R e^{-x^2}\,e^{-y^2}\,dy\,dx = \int_0^R e^{-y^2}\,dy\int_0^R e^{-x^2}\,dx$
$= F^2(R)$

3. **a.** Il ne reste qu'à tracer les trois domaines imbriqués.



b. La fonction qu'on intègre est positive, l'imbrication des domaines et la positivité de l'intégrale nous donne : $J(R) \leqslant K(R) \leqslant J\left(\sqrt{2}R\right)$.

4. $\lim\limits_{R\to+\infty} J(R) = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{\pi}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-R^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   Donc : $\lim\limits_{R\to+\infty} K(R) = \dfrac{\pi}{4}$.

5. Ce qui donne : $\lim\limits_{R\to+\infty} F^2(R) = \dfrac{\pi}{4}$, qu'on associe à $F(R) \geqslant 0$.
   On en déduit : $\lim\limits_{R\to+\infty} F(R) = I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

IV Développements en séries entières

1. **a.** On a : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

   b. On remplace u par $-x^2$, et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

2. **a.** On peut primitiver terme à terme une série entière sur son ouvert de convergence, ici $\mathbb{R}$.
   F est la primitive de f qui s'annule en 0, et on vient de développer f en série entière.
   La constante d'intégration est donc nulle.

   b. On obtient donc facilement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\times n!}$.

3. **a.** On a : $\forall x \in]-R, R[$, $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   On peut dériver terme à terme une série entière sur son ouvert de convergence ? ce qui donne :
   $\forall x \in]-R, R[$, $y' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
   On travaille toujours sur le même intervalle, ce qu'on ne précisera plus.
   $y' - 2xy = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$.
   On réindexe la première somme en posant $n' = n - 1$ et la seconde en posant $n' = n + 1$.

$$y' - 2xy = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1)a_{n'+1}x^{n'} - 2\sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'-1}x^{n'} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}\right)x^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on a $a_1 = 1$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$.

Ce qui est le résultat demandé, qui ne nécessite pas encore $a_0 = 0$.

Notons que c'est bien une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de la série entière vérifie l'équation différentielle (E) !

b. Comme $a_0 = 0$, la relation de récurrence avec $n = 1$ donne $a_2 = 0$.

Si on suppose $a_{2p} = 0$, la relation de récurrence avec $n = 2p+1$ donne $a_{2(p+1)} = 0$.

On a bien montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

Pour l'autre formule : $\dfrac{2^0 \times 1!}{(1)!} = 1 = a_1$. On a la formule donnant a_{2n+1} pour $n = 0$.

On admet maintenant que $a_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}$.

La relation de récurrence appliquée avec $n = 2p+2$ donne :

$$a_{2(p+1)+1} = \frac{2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} = \frac{2}{2p+3} \times \frac{2(p+1)}{2p+2} \times \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)}(p+1)!}{(2(p+1)+1)!}.$$

La formule est donc démontrée par récurrence également.

c. On doit donc chercher le rayon de convergence de $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$.

On utilise le théorème de d'Alembert en prenant $x \neq 0$.

$\left|\dfrac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \dfrac{2}{2n+3}x^2$, dont la limite est nulle quand $n \to +\infty$.

Le rayon de convergence de cette série entière est donc $+\infty$.

J'imagine que, quand l'énoncé parle de sa somme, c'est de $n = 0$ à $+\infty$.

Soit h définie par $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$,

h vérifie donc l'équation différentielle (E), avec $h(0) = 0$.

En effet, les a_{2n}, qui sont nuls, et les a_{2n+1}, vérifient la relation du **3.a.**, donc l'équation différentielle !

d. Calculons d'abord : $g'(x) = 2x\,e^{x^2}F(x) + e^{x^2}F'(x) = 2x\,e^{x^2}F(x) + e^{x^2}e^{-x^2} = 2xg(x) + 1$.

On a donc bien : $g'(x) - 2xg(x) = 1$.

g vérifie donc bien l'équation différentielle (E) et on a aussi : $g(0) = F(0) = 0$.

e. $\mathbb{R}$ est un intervalle convenable pour l'équation différentielle (E).

Sur un tel intervalle, la solution de (E), avec une condition initiale du type $g(x_0) = y_0$, est unique.

h et g sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec la même condition initiale $g(0) = 0$. Elles sont donc égales.

g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$