Exercice

1. Il faut bien lire $\varphi(P)(X) = (X+2)\,P(X) - X\,P(X+1)$,
   oralement, « $X+2$ fois P de X, moins, X fois P de $X+1$ ».
   Alors $\varphi(1) = (X+2) - X = 2$, et
   $\varphi(X^3) = (X+2)X^3 - X(X+1)^3 = X^4 + 2X^3 - X(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) = -X^3 - 3X^2 - X$.
2. $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = (X+2)(\lambda P_1 + \mu P_2) - X(\lambda P_1 + \mu P_2)(X+1)$
   $= \lambda(X+2)P_1 + \mu(X+2)P_2 - \lambda X P_1(X+1) - \mu X P_2(X+1) = \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)$
   Ceci étant vrai pour tous les λ et μ réels et tous les polynômes P_1 et P_2, on a bien la linéarité de φ.
3. $\varphi(X^k) = (X+2)X^k - X(X+1)^k = X^{k+1} + 2X^k - X(X^k + kX^{k-1} + \cdots) = (2-k)X^k + \cdots$,
   les termes en pointillés étant de degré strictement inférieur aux degrés des termes qui les précédent.
   Le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ est donc $(2-k)X^k$, sauf pour $k = 2$.
   $\varphi(X^2) = (X+2)X^2 - X(X^2 + 2X + 1) = -X$. Le coefficient dominant de $\varphi(X^2)$ est $-X$.
4. φ n'augmente donc pas le degré des polynômes.
   On a donc $\varphi(\mathbb{R}^n[X]) \subset \mathbb{R}^n[X]$, φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n[X]$.
5. (a) La matrice est constituée en colonnes, des coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ et $\varphi(X^3)$, dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. On a calculé tous ces polynômes.
   Ce qui donne bien la matrice M.

   (b) M est triangulaire, son polynôme caractéristique est donc : $Q(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda)$.

   (c) Les valeurs propres de φ sont donc : 2, 1, 0 et -1, toutes simples.

   (d) Le polynôme caractéristique de φ est scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

   (e) Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.
   $\varphi(1) = 2$ donne 1 propre pour la valeur propre 2, $E_2 = \mathrm{Vect}(1)$.
   $\varphi(X) = X$ donne X propre pour la valeur propre 1, $E_1 = \mathrm{Vect}(X)$.
   Il nous reste à déterminer E_0 et E_{-1}.

   Pour appartenir à E_0, le polynôme $a + bX + cX^2 + dX^3$ doit vérifier : $\begin{cases} 2a = 0 \\ b - c - d = 0 \\ -3d = 0 \\ -d = 0 \end{cases}$,

   ou encore $\begin{cases} a = 0 \\ b = c \\ d = 0 \end{cases}$

   $E_0 = \mathrm{Vect}(X + X^2)$.

   Pour appartenir à E_{-1}, le polynôme $a + bX + cX^2 + dX^3$ doit vérifier : $\begin{cases} 3a = 0 \\ 2b - c - d = 0 \\ c - 3d = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$,

   ou encore $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2d \\ c = 3d \end{cases}$

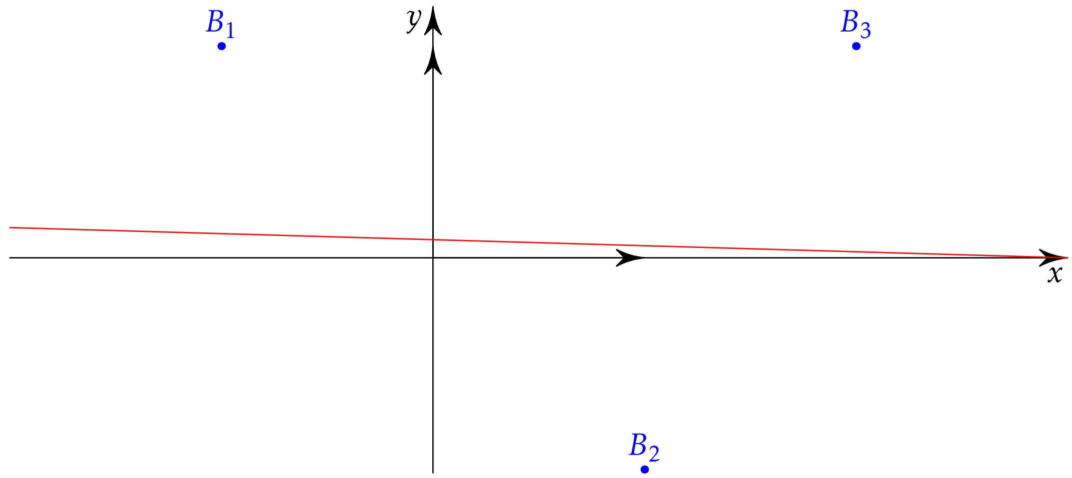
   $E_0 = \mathrm{Vect}(2X + 2X^2 + X^3)$.

Problème

I Un exemple numérique

1. On a $B_i\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$, et $H_i\begin{pmatrix}x_i\\mx_i+p\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{B_iH_i}\begin{pmatrix}0\\mx_i+p-y_i\end{pmatrix}$.
   On obtient alors : $(B_iH_i)^2=(mx_i+p-y_i)^2=(y_i-mx_i-p)^2$.
2. Ce qui donne : $\delta(m,p)=(1+m-p)^2+(-1-m-p)^2+(1-2m-p)^2=6m^2+3p^2-4mp-2p+3$.
3. S est la matrice de la forme quadratique q, donc : $q(m,p)={}^tUSU$.
4. Le polynôme caractéristique de S est : $\begin{vmatrix}6-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14$
   $\Delta=81-56=25=5^2$, donc les racines sont 2 et 7. On pose donc $\lambda=2$ et $\mu=7$.
5. La somme des racines de $\lambda^2-9\lambda+14$ est 9, leur produit 14. 2 et 7 sont bien les seuls nombres vérifiant ces égalités.
6. S est symétrique réelle donc diagonalisable avec, au besoin, une matrice de passage orthogonale, c'est à dire vérifiant $P^{-1}={}^tP$.
   On a donc $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}=P^{-1}SP={}^tPSP$, ce qui donne : $S=PDP^{-1}=PD\,{}^tP$
7. On a donc ici $U=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et aussi ${}^tU=(X,Y)\,{}^tP$.
   On reporte dans $q(m,p)={}^tUSU=(X,Y)\,{}^tPSP\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=(X,Y)D\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=(X,Y)\begin{pmatrix}2X\\7Y\end{pmatrix}=2X^2+7Y^2$
8. Cherchons E_2 d'abord. Un vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de E_2 vérifie $\begin{cases}4x+2y=0\\2x+y=0\end{cases}$ qui est équivalent à $2x+y=0$.
   Il est donc colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. De plus, il doit être normé, donc : $\begin{pmatrix}a_{1,1}\\a_{2,1}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
   On sait que les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont orthogonaux.
   E_7 est donc engendré par $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. De plus, il doit être normé, donc : $\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
9. Finalement, P orthogonale vérifiant les conditions demandées est unique : $P=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$.
10. On a encore ici $U=\begin{pmatrix}m\\p\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$. ce qui donne : $\begin{cases}m=\frac{1}{\sqrt5}(X+2Y)\\p=\frac{1}{\sqrt5}(-2X+Y)\end{cases}$.
11. $\delta(m,p)=q(m,p)-2p+3=2X^2+7Y^2-\frac{2}{\sqrt5}(-2X+Y)+3=2\left(X^2+\frac{2}{\sqrt5}X\right)+7\left(Y^2-\frac{2}{7\sqrt5}Y\right)+3$
    $=2\left(\left(X+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-\frac15\right)+7\left(\left(Y+\frac{1}{7\sqrt5}\right)^2-\frac{1}{7^2\,5}\right)+3=2\left(X+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+7\left(Y+\frac{1}{7\sqrt5}\right)^2+\frac{18}{7}$.
12. Comme λ et μ sont positifs, le minimum est obtenu quand les deux carrés sont nuls. Il vaut à ce moment : $K=\frac{18}{7}$.
13. Ce minimum est atteint pour $X=\frac{-1}{\sqrt5}$ et $Y=\frac{1}{7\sqrt5}$, ce qui donne :
    $$\begin{cases}m_0=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{-1}{\sqrt5}+2\frac{1}{7\sqrt5}\right)=\frac{-1}{7}\\ p_0=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{7\sqrt5}\right)=\frac{3}{7}\end{cases}$$

14. Il nous reste à faire le graphe, pour le moins peu parlant...



II Distance en dimension 3

1. (a) Les vecteurs colonnes de la matrice d'une application linéaire forment une famille génératrice de l'image.

   Comme ici, ces deux vecteurs colonnes forment clairement une famille libre, ils forment une base de l'image.

   Le rang de f est donc égal à 2.

   La dimension de l'espace de départ est aussi 2, donc la dimension du noyau est 0, par application du théorème du rang.

   (b) L'image de f est un plan vectoriel. On aura un vecteur normal à ce plan en faisant le produit vectoriel des 2 vecteurs de la base de ce plan.

   $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

   Ce plan est donc d'équation : $-x + 3y - 2z = 0$.

   (c) f est injective, car son noyau est réduit au vecteur nul.

   Elle n'est pas surjective, car son image est de dimension 2 et l'espace d'arrivée est de dimension 3.

   Elle n'est donc pas bijective non plus.

   (d) On démarre avec $\overrightarrow{\varepsilon_1^*}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, on le norme, et on a : $\overrightarrow{\varepsilon_1}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

   On pose $\overrightarrow{\varepsilon_2^*} = \overrightarrow{e_2} + \lambda\,\overrightarrow{\varepsilon_1}$, avec $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   On cherche λ en écrivant l'orthogonalité de $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2^*}$, on obtient $\lambda = -\left(\overrightarrow{e_2}\middle|\overrightarrow{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{-2}{\sqrt{6}}$.

   On obtient alors : $\overrightarrow{\varepsilon_2^*}\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$, puis, en le normant, $\overrightarrow{\varepsilon_2}\begin{pmatrix}4/\sqrt{21}\\2/\sqrt{21}\\1/\sqrt{21}\end{pmatrix}$.

   La base orthonormale cherchée est : $\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}\right)$.

2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ forment clairement une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc libre. Ce sont également des vecteurs normés.

Leurs coordonnées vérifient l'équation du plan : $-x + 3y - 2z = 0$, le calcul est élémentaire. On a donc une base orthonormale de ce plan.

(b) On a $\overrightarrow{y_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc : $\left(\overrightarrow{y_0}|\overrightarrow{u_1}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$, et aussi : $\left(\overrightarrow{y_0}|\overrightarrow{u_2}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{70}}$.

Ce qui donne : $Z_0 = \dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \dfrac{4}{70}\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix} = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix}20\\10\\5\end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$.

(c) On cherche $X_0 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, un antécédent de Z_0 par f.

On a donc l'égalité : $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Ceci est équivalent au système : $\begin{cases}\dfrac{4}{7} = -\alpha + \beta\\\dfrac{2}{7} = \alpha + \beta\\\dfrac{1}{7} = 2\alpha + \beta\end{cases}$.

Les deux premières lignes fournissent $\beta = \dfrac{3}{7}$ et $\alpha = \dfrac{-1}{7}$, valeurs qui sont bien compatibles avec la troisième ligne.

On a donc un unique antécédent : $X_0 = \begin{pmatrix}-1/7\\3/7\end{pmatrix}$.

3. (a) Élémentairement, $AX - Y_0 = \begin{pmatrix}-m+p-1\\m+p+1\\2m+p-1\end{pmatrix}$.

Et donc : $\|AX - Y_0\|^2 = (-m+p-1)^2 + (m+p+1)^2 + (2m+p-1)^2 = \delta(m,p)$.

(b) $\inf\{\delta(m,p)/m, p \in \mathbb{R}\} = \inf\{\|AX - Y_0\|^2/m, p \in \mathbb{R}\}$

C'est donc le carré de la distance de Y_0 à l'image de f, qui est ici l'ensemble des vecteurs AX.
On sait que cette distance est obtenue en remplaçant AX par Z_0, la projection orthogonale de Y_0 sur ce plan. sur ce plan.
C'est donc bien $\|Z_0 - Y_0\|^2 = \mathrm{d}(Y_0, Z_0)^2$.

(c) Quand $AX = Z_0$, on a $X = X_0 = \begin{pmatrix}-1/7\\3/7\end{pmatrix}$, c'est à dire, $m = -1/7$ et $p = 3/7$.

On a bien la droite de régression linéaire d'équation $y = mx + p$.