CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculatrices autorisées

Objectif et convention

On étudie dans ce sujet certains endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel. On se propose, entre autres, de reconnaître parmi ceux-ci les endomorphismes de référence : projections orthogonales, réflexions, rotations etc.

On notera $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Conformément à l'usage, les candidats pourront identifier les vecteurs (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ et les matrices colonnes à trois coefficients réels $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On pourra ainsi considérer que $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tous nombres réels a, b et c, on considère la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$,

$f_{a,b,c}$ désignera l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel ayant pour matrice $M(a,b,c)$ dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

On notera :
I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$;
$\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation, dans la base canonique, $x+y+z=0$;
et Δ la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{P}$.

Les parties ne sont pas indépendantes. En particulier, l'étude des valeurs propres, faite dans la partie III, intervient dans la partie IV.

I Préliminaire important

On pose $\boldsymbol{e}'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1°) Construction d'une base orthonormale directe

1.a) Montrer que $\boldsymbol{e}'_1$ est un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) dirigeant la droite Δ.

1.b) Montrer que $\boldsymbol{e}'_2$ est un vecteur unitaire appartenant au plan $\mathcal{P}$.

1.c) Déterminer un vecteur $\boldsymbol{e}'_3$ de sorte que $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbf{R}^3$.

2°) Soient a, b et c des réels.

2.a) Préciser $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_1)$ et en déduire que le réel $a+b+c$ est une valeur propre de $f_{a,b,c}$.

2.b) Justifier que la famille $(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}$.

2.c) Vérifier que les vecteurs $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_2)$ et $f_{a,b,c}(\boldsymbol{e}'_3)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

2.d) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par $f_{a,b,c}$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^3$ est stable par un endomorphisme f quand pour tout $\boldsymbol{u}$ de F, son image par f, c'est-à-dire le vecteur $f(\boldsymbol{u})$, appartient également à F.

Les résultats de ce préliminaire peuvent être utilisés à de nombreuses reprises dans la suite du sujet.

II Quelques exemples

3°) On note ψ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $J = M(0,1,0)$.

3.a) Déterminer le rang de la matrice J. J est-elle inversible ?

3.b) Calculer le polynôme caractéristique de J et montrer que J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

3.c) Donner la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}'$ choisie au préliminaire I.1°) (*on pourra utiliser les calculs faits au préliminaire ou utiliser la formule de changement de bases et la calculatrice*).

3.d) En déduire que l'endomorphisme ψ est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques (axe orienté, angle).

4°) Dans cette question, on considère la matrice $M_2 = M(1/3, -2/3, -2/3)$.

4.a) Préciser la matrice $M_2 \times M_2$. Que dire du rang de M_2 ?

4.b) Justifier que l'endomorphisme s de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M_2 est une symétrie.
Préciser les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ (associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1).

4.c) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de M_2.

5°) Dans cette question, on considère la matrice $M_1 = M(1/3, 1/3, 1/3)$.

5.a) Déterminer le rang de la matrice M_1. M_1 est-elle inversible ?

5.b) Calculer, en faisant apparaître le détail des calculs, le polynôme caractéristique de M_1 (*on pourra commencer par l'opération élémentaire* $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$).

5.c) Préciser chaque sous-espace propre de M_1.

5.d) Justifier que M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et reconnaître géométriquement l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M_1.

III Étude des matrices $M(a, b, c)$

Dans cette partie, a, b et c désignent des nombres réels. On rappelle que $J = M(0,1,0)$.

On désignera par j le complexe $\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ où $\mathrm{i}^2 = -1$.

6°) Sans calculatrice, justifier : $\mathrm{j}^3 = 1$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

7°) Préciser la matrice J^2 et exprimer la matrice $M(a, b, c)$ à l'aide des matrices I_3, J et J^2 et des réels a, b et c.

8°) Étude de J dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$

8.a) Déterminer les valeurs propres **complexes** de J et montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.
On rappelle que le polynôme caractéristique de J a déjà été obtenu à la question 3.b).

8.b) Expliciter une matrice P à coefficients **complexes** telle que $D = P^{-1}JP$ soit une matrice diagonale à coefficients **complexes** que l'on précisera.

8.c) Montrer que $P^{-1}J^2P = D^2$.
Que vaut la matrice $P^{-1}I_3P$?

9°) Soient a, b et c réels.

9.a) Déduire des questions 7°) et 8°) que $M(a, b, c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ et que les valeurs propres complexes (éventuellement confondues) de $M(a, b, c)$ sont :

$$a + b + c, \quad a + \mathrm{j}\, b + \mathrm{j}^2\, c \quad \text{et} \quad a + \mathrm{j}^2\, b + \mathrm{j}\, c.$$

9.b) Préciser les parties réelles et imaginaires de chacune des valeurs propres de $M(a, b, c)$ en fonction de a, b et c.

9.c) Montrer que les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont toutes réelles si, et seulement si, les réels b et c sont égaux.

10°) Dans cette question, on suppose que les réels b et c sont différents : $b \neq c$.
Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

11°) Dans cette question, on suppose que les réels b et c sont égaux : $b = c$.
On rappelle que $f_{a,b,b}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M(a, b, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

11.a) Déterminer les valeurs propres de $f_{a,b,b}$, ainsi que les sous-espaces propres associés *(on envisagera les deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$).*

11.b) Montrer que $f_{a,b,b}$ est diagonalisable et plus précisément qu'il existe une matrice à coefficients réels Q **orthogonale** telle que pour tous réels a et b, la matrice $D(a, b) = {}^{\mathbf{t}}QM(a, b, b)Q$ soit diagonale.
Expliciter une telle matrice Q (*on pourra utiliser 1.c)*), ainsi que la matrice $D(a, b)$ obtenue.

IV Application : Étude des projecteurs

12°) Soient a, b et c des nombres réels.

12.a) À l'aide de la partie précédente, montrer que :
$f_{a,b,c}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes si, et seulement si, $(b = c$ et $b \neq 0)$.

12.b) Déterminer les valeurs des réels a, b et c pour lesquelles l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b,c}$ est exactement $\{0, 1\}$.

12.c) En déduire l'équivalence des deux assertions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) $f_{a,b,c}$ est un projecteur de $\mathbf{R}^3$ autre que l'identité et l'application nulle

(ii) $(a, b, c) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ou $(a, b, c) = (2/3, -1/3, -1/3)$

Préciser les éléments caractéristiques des deux projecteurs obtenus.

Fin de l'énoncé