I Préliminaire important

1°) Construction d'une base orthonormale directe

1.a) Δ est normale au plan d'équation $x+y+z=0$, donc engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\left\|e'_1\right\| = \sqrt{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}} = 1$, e'_1 est un vecteur normé dirigeant Δ.

1.b) Les coordonnées de e'_2 vérifient l'équation de $\mathcal{P}$, $e'_2 \in \mathcal{P}$.

1.c) Il suffit de prendre $e'_3 = e'_1 \wedge e'_2$, ses coordonnées sont donc $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

2°)

2.a) Les coordonnées de $f_{a,b,c}(e'_1)$ sont $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}a+b+c\\c+a+b\\b+c+a\end{pmatrix} = (a+b+c)e'_1$.

e'_1 est propre pour f et la valeur propre $a+b+c$.

2.b) e'_2 et e'_3 sont des vecteurs normés, orthogonaux de $\mathcal{P}$.
Celui ci est de dimension 2, ces deux vecteurs en forment donc une base orthonormale.

2.c) $f_{a,b,c}(e'_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a-b\\c-a\\b-c\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, car il est normal à e'_1.

$f_{a,b,c}(e'_3) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}a+b-2c\\c+a-2b\\b+c-2a\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, car il est aussi normal à e'_1.

2.d) Soit $u \in \mathcal{P}$, alors, $u = ae'_2 + be'_3$, et $f_{a,b,c}(u) = af_{a,b,c}(e'_2) + bf_{a,b,c}(e'_3) \in \mathcal{P}$.
$\mathcal{P}$ est stable par $f_{a,b,c}$.

II Quelques exemples

3°)

3.a) $J = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, son déterminant est 1, le rang de J est 3, la matrice est inversible.

3.b) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1-\lambda&-\lambda&1\\1-\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&-1-\lambda&1\\0&-1&-\lambda\end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+1)$.

Ce polynôme n'est pas scindé, J n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3.c) La matrice cherchée est $J' = P^{-1}JP = {}^tPJP$.

Avec $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

Donc $J' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\end{pmatrix}$

3.d) ψ est donc la rotation d'axe dirigé et orienté par e'_1, et d'angle $2\pi/3$.

4°) Matrice M_2

4.a) $M_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, donc $M_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est inversible.

Donc M_2 est de rang 3.

4.b) $M_2^2 = I_3$, donc, $s \circ s = \mathrm{Id}$, s est une symétrie.

Ici, M_2 est orthogonale et symétrique dans une base orthonormale. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Les deux sous-espaces propres sont orthogonaux.

$M_2 - I_3 = \dfrac{-2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Son noyau est le plan d'équation $x + y + z = 0$, c'est $\mathcal{P}$.

ψ est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

$\ker(s - \mathrm{Id}) = \mathcal{P}$ et $\ker(s + \mathrm{Id}) = \Delta$.

4.c) 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple, $P_{M_2}(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$.

5°) Matrice M_1

5.a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

M_1 est clairement de rang 1, non inversible.

5.b) $P_{M_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -\lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2$

5.c) 0 est valeur propre double, le sous espace propre associé est le noyau de M_1, c'est $\mathcal{P}$.

1 est valeur propre simple, le sous espace propre associé est le noyau de $M_1 - I_3$,

le noyau de $\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

Cela correspond au système $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$

Finalement $E_1 = \Delta$

On aurait pu le deviner, la matrice est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont orthogonaux !

5.d) La somme des dimensions des sous espaces propres est 3, M_1 est diagonalisable.

Les valeurs propres sont 0 et 1, c'est la matrice de la projection orthogonale sur Δ.

III Étude des matrices $M(a, b, c)$

6°) $\mathrm{j}^3 = \exp(2\mathrm{i}\pi) = 1$.

$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = \dfrac{1 - \mathrm{j}^3}{1 - \mathrm{j}} = 0$.

7°) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

8°) Étude de J

8.a) On utilise le **3.b)**, les valeurs propres de J sont 1, simple,
et les racines (complexes) de $1+\lambda+\lambda^2$, c'est à dire j et $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$, simples aussi.

8.b) On a déjà vu que $E_1 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

E_{j} est le noyau de $\begin{pmatrix}-\mathrm{j} & 1 & 0\\ 0 & -\mathrm{j} & 1\\ 1 & 0 & -\mathrm{j}\end{pmatrix}$

Cela correspond au système $\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{j}x+y=0\\ -\mathrm{j}y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\mathrm{j}x\\ z=\mathrm{j}^2x\end{array}\right.$.

$E_{\mathrm{j}} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \mathrm{j}^2\end{pmatrix}$.

Le même calcul donne $E_{\mathrm{j}^2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}^2\\ \mathrm{j}\end{pmatrix}$.

Finalement, $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2\\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j}\end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{j} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{j}^2\end{pmatrix}$.

8.c) $D^2 = P^{-1}JPP^{-1}JP = P^{-1}J^2P$, et, $P^{-1}I_3P = I_3$.

On a aussi $D^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{j}^2 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{j}\end{pmatrix}$.

9°)

9.a) $P^{-1}M(a,b,c)P = P^{-1}(aI_3+bJ+cJ^2)P = aP^{-1}I_3P + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P = aI_3 + bD + cD^2$
$= \begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\ 0 & a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2 & 0\\ 0 & 0 & a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}\end{pmatrix}$.

$M(a,b,c)$ est bien diagonalisable, les valeurs propres sont bien $a+b+c$, $a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2$, $a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}$.

9.b) On sépare les parties réelles et imaginaires.

$a+b+c = (a+b+c)+0\mathrm{i}$,

$a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2 = \left(a-\dfrac{b+c}{2}\right) + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$,

$a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j} = \left(a-\dfrac{b+c}{2}\right) - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$.

9.c) Les valeurs propres sont donc réelles si et seulement si $b-c=0$, ou encore $b=c$.

10°) Le polynôme caractéristique n'est pas, dans le cas où $b \neq c$, scindé sur $\mathbb{R}$.
La matrice n'est donc pas diagonalisable.

11°) Etude de $f_{a,b,b}$

11.a) Les valeurs propres sont donc réelles, données par les formules $a+2b$ et $a-b$.

Quand $b=0$, alors a est valeur propre triple et $E_a = E$.

Quand $b \neq 0$, $a+2b$ est valeur propre simple et $a-b$ double.

La matrice est symétrique réelle, diagonalisable, et les sous-espaces propres sont orthogonaux.

E_{a-b} est le noyau de $\begin{pmatrix}b & b & b\\ b & b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}$, c'est $\mathcal{P}$.

Et donc, E_{a+2b} est Δ.

11.b) La matrice étant diagonalisable, l'endomorphisme l'est aussi !
Une matrice Q convenable est la matrice P du **3.c)**.
$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.
Et alors, $D(a,b) = Q^{-1}M(a,b,b)Q = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.
Le calcul explicite est inutile, le premier vecteur colonne dirige Δ, les deux autres $\mathcal{P}$.

IV Étude des projecteurs

12°)

12.a) Les valeurs propres de $f_{a,b,c}$ sont celles de $M(a,b,c)$.
Il s'agit donc des résultats du **10°)** et du **11.a)**.

12.b) Pour que le couple de valeurs propres soit $\{0,1\}$, on a deux cas :
$\begin{cases} a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$, ou $\begin{cases} a+2b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$.
Cela correspond à $\begin{cases} a=2/3 \\ b=-1/3 \end{cases}$, ou $\begin{cases} a=1/3 \\ b=1/3 \end{cases}$.

12.c) f est un projecteur $\Leftrightarrow$ f est diagonalisable et les valeurs propres sont 0 ***et/ou*** 1.
On en déduit facilement que f est un projecteur non nul et différent de l'identité
$\Leftrightarrow$ f est diagonalisable et les valeurs propres sont 0 ***et*** 1.
Compte tenu de ce qu'on vient de faire cela équivaut à $(a,b,c) = (1/3, 1/3, 1/3)$,
ou, $(a,b,c) = (2/3, -1/3, -1/3)$.