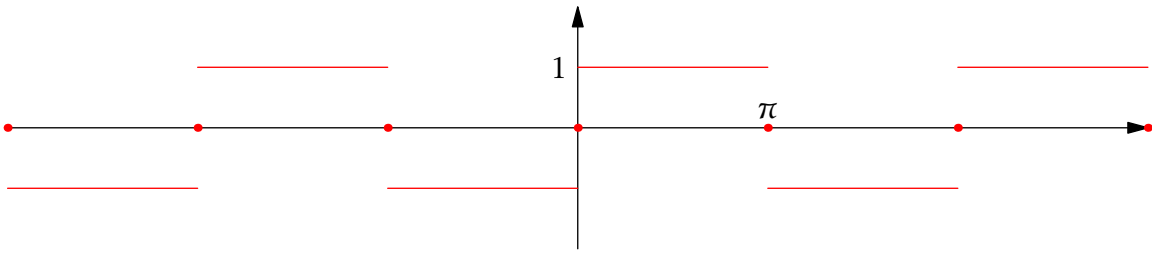
Exercice 1

1. f est impaire, donc $f(0) = 0$.
   f est impaire, donc $f(-\pi) = -f(\pi)$, et f est 2π périodique, donc $f(-\pi) = f(\pi)$.
   Finalement $f(\pi) = -f(\pi)$, et $f(\pi) = 0$.
   $f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = f\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(4\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$.
2.



3. **a.** f est impaire, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$.
   Si n est pair, on pose $n = 2p$, et on a $b_{2p} = 0$.
   Si n est impair, on pose $n = 2p+1$, et on a $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$.

   b. La série de Fourier de f est donc
   $$S(f)(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}\sin((2p+1)t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin((2p+1)t)}{2p+1}.$$
   On réécrit $S(f)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$.
   Notons que f est 2π périodique, de classe $\mathscr{C}_1$ par morceaux, ceci assure que la série de Fourier de f converge en tout point.
   De plus, en tout point, $f(t)$ est la demi-somme des limites à droite et à gauche en ce point.
   Ceci nous prouve que la série de Fourier de f converge en tout point t vers $f(t)$.
   Et donc, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$.

   c. Cette égalité est donc valable pour $t = \frac{\pi}{2}$,
   et donc, $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
   Ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

   d. La formule de Parseval nous dit que $a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   On l'applique ici en tenant compte que f est impaire, $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{b_{2p+1}^2}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   Ce qui donne $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{8}{(2p+1)^2\pi^2} = 1$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. **a.** $|\exp(-xt)f(t)| \leqslant \exp(-xt)$, et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt)\,\mathrm{d}t$ converge,
la fonction donnée est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b. Sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $f(t) = (-1)^k$, et donc
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt)f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt)\,\mathrm{d}t = (-1)^k \frac{-\exp(-(k+1)\pi x) + \exp(-k\pi x)}{x}$$
$$= \Big(-\exp(-\pi x)\Big)^k \frac{1-\exp(-\pi x)}{x}$$

c. $$\int_0^{+\infty} \exp(-xt)f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \exp(-xt)f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt)f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1-\exp(-\pi x)}{x} \Big(-\exp(-\pi x)\Big)^k = \frac{1-\exp(-\pi x)}{x} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(-\exp(-\pi x)\Big)^k$$
$$= \frac{1-\exp(-\pi x)}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(-\exp(-\pi x)\Big)^k = \frac{1-\exp(-\pi x)}{x} \times \frac{1}{1+\exp(-\pi x)}$$
$$= \frac{1}{x} \times \frac{1-\exp(-\pi x)}{1+\exp(-\pi x)} = \frac{1}{x} \times \frac{\exp(\pi x/2) - \exp(-\pi x/2)}{\exp(\pi x/2) + \exp(-\pi x/2)} = \frac{1}{x}\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Exercice 2

1. f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \Big(\forall x_1, x_2 \in I,\ x1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\Big)$.

$0 < x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow 0 < x_1 + t \leqslant x_2 + t \Rightarrow \dfrac{\exp(t)}{x_1+t} \geqslant \dfrac{\exp(t)}{x_2+t} \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

f est bien décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. **a.** $$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \exp(t)\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \exp(t)\frac{x_0 - x}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t$$
$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \int_0^1 \exp(t)\frac{|x-x_0|}{(x+t)(x_0+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\frac{|x-x_0|}{x_0 x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}\,|x-x_0|}{x_0 x}$$
Finalement, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}\,|x-x_0|}{x_0^2}$ sur $\left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$.

b. Ceci prouve que, quand $x \to x_0$, alors $f(x) \to f(x_0)$, f est continue en x_0.
Dans un deuxième temps, bien sûr, f est bien continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. On a $\dfrac{\exp(t)}{x+1} \leqslant \dfrac{\exp(t)}{x+t} \leqslant \dfrac{\exp(t)}{x}$,
donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(t)}{x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\exp(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\exp(t)}{x}\,\mathrm{d}t$,
et enfin, $\dfrac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$.
Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}-1} f(x) = 1$, et donc, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$.

4. **a.** La dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle, donc,
$|\exp(t) - \exp(0)| \leqslant \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[0,1]} |\exp(t)|\ |t-0|$.
Ce maximum est e, on a, compte tenu que t est positif,
$\forall t \in [0,1],\ |\exp(t) - 1| \leqslant \mathrm{e}t$.

b. L'inégalité précédente donne $\left|\dfrac{\exp(t)-1}{x+t}\right| \leqslant \mathrm{e}\dfrac{t}{x+t} \leqslant \mathrm{e}$.
Ce qui entraine $|g(x)| \leqslant \mathrm{e}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

c. $f(x) = g(x) + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = g(x) + \ln(x+1) - \ln(x)$.
D'où $f(x) = -\ln(x)\left(1 - \dfrac{g(x)+\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$.
$\dfrac{g(x)+\ln(x+1)}{\ln(x)} \to 0$ quand $x \to 0$, et on a bien $f(x) \underset{0_+}{\sim} -\ln(x)$.

5. **a.** $h(t) = \dfrac{\exp(t)}{1+t}$, un calcul facile donne $h'(t) = \dfrac{t\exp(t)}{(1+t)^2} \geqslant 0$, pour $t \geqslant 0$.
h est bien croissante sur $[0,1]$.

b. u_n et v_n sont des sommes de Riemann, ce sont des valeurs approchées de $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$.
C'est un calcul d'aires « en bâtons ».

c. Sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, on a $h\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant h(t) \leqslant h\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$, qu'on intègre sur l'intervalle,
ce qui donne $\dfrac{1}{n}h\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n}h\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$,

d. Et maintenant, on somme de $k=0$ à $k=n-1$, $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant v_n$, et on reconnait $f(1)$!
On a donc $u_n \leqslant f(1) \leqslant v_n$.
Et maintenant, $u_n - \dfrac{u_n+v_n}{2} = \dfrac{u_n-v_n}{2} \leqslant f(1) - \dfrac{u_n+v_n}{2} \leqslant v_n - \dfrac{u_n+v_n}{2} = \dfrac{v_n-u_n}{2}$,
ou encore, $\left|f(1) - \dfrac{u_n+v_n}{2}\right| \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2} = \dfrac{h(1)-h(0)}{2n}$.

e. Il suffit d'avoir $\dfrac{h(1)-h(0)}{2n} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2}$, pour avoir le résultat demandé,
c'est à dire $n \geqslant 50(h(1)-h(0)) = 50\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1\right) \simeq 17,95$.
$n_0 = 18$ convient donc. On trouve $f(1) \simeq \dfrac{113}{100}$.

Exercice 3

1. Pour $x_0 > 0$, ce sont des séries numériques à termes strictement positifs. Le critère de d'Alembert donne à chaque fois une convergence pour $x_0 < 1$ et une divergence sinon.
Les trois séries ont donc un rayon de convergence égal à 1.
On se place donc à chaque fois sur $]-1,1[$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, comme somme d'une série géométrique.
La somme d'une série entière se dérive terme à terme sur l'ouvert de convergence,
donc, $xf'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = h(x)$.
Et ainsi, $h(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

3. **a.** Pour $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow x_1^n \leqslant x_2^n \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x_1^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x_2^n \Rightarrow g(x_1) \leqslant g(x_2)$.
g est bien croissante sur $[0,1]$.

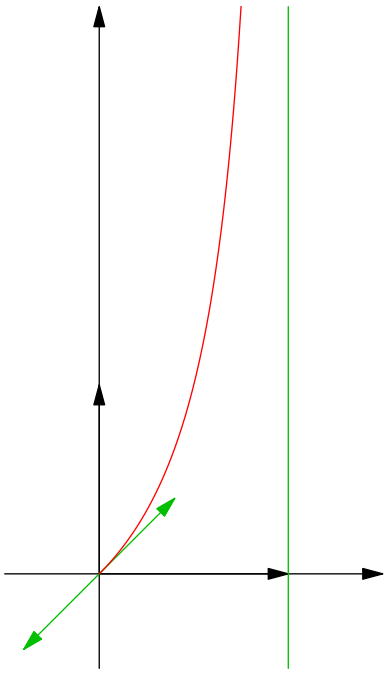
b. On a $g(x) \geqslant f(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 1_-]{} +\infty$, donc, $g(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} +\infty$.

c. on a facilement $g(0) = 0$, et en dérivant terme à terme, $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sqrt{n}x^{n-1}$.

Donc $g'(0) = 1$.

De plus, toujours en dérivant terme à terme, $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\sqrt{n}x^{n-2}$.

On a donc $g''(0) = 2\sqrt{2} \geqslant 0$, la concavité est tournée vers le haut.
On rappelle que g est croissante sur $[0,1[$, où l'allure de la courbe est donc :



4. **a.** g est strictement croissante sur $[0,1[$, et, $g([0,1[) = [0,+\infty[$,
il existe donc un α unique de $[0,1[$, tel que $g(\alpha) = 2$.

b. $h(0,5) = 0,5/0,25 = 2$, et de plus, $g(0,5) \leqslant h(0,5)$, donc, $g(0,5) \leqslant 2$.
Et comme g est croissante, $\alpha \geqslant 0,5$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} \sqrt{n}(0,6)^n \simeq 1,916$, et, $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \sqrt{n}(0,6)^n \simeq 2,031$.
On a donc $n_0 = 6$.
Ceci prouve que $g(0,6) \geqslant 2$, et donc, $\alpha \leqslant 0,6$.

5. **a.** $(1-x)g(x) = g(x) - xg(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n+1}$.

On ré-indexe la seconde somme avec $n' = n+1$ suivi de $n = n'$, on obtient,

$$(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n.$$

b. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leqslant 0$.

De plus $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La suite $|u_n|$ décroit et tend vers 0 à l'infini, la série alternée, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$ converge.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ diverge donc.

Finalement, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$

– converge en -1,

– diverge en 1.

Son rayon de convergence est donc 1.

d. $G(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$ est définie, et donc continue, sur $[-1, 1[$.

Donc $G(x) \xrightarrow[x\to -1_+]{} G(-1)$, ce qui donne $(1-x)g(x) \xrightarrow[x\to -1_+]{} G(-1)$,

ou encore, $g(x) \xrightarrow[x\to -1_+]{} \dfrac{G(-1)}{2} = \dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n}{2}$.