

I Étude d'une fonction

1 – Sur \mathbb{R}^* , f est de classe \mathcal{C}^1 , et même \mathcal{C}^∞ , par composée d'applications élémentaires de même classe.

Toujours sur \mathbb{R}^* , $f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

Notons que la dérivée f' est toujours négative. L'application f sera donc décroissante sur tout intervalle où elle est définie.

2 – La limite d'une exponentielle en $-\infty$ est 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

3 – $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$, par application du théorème des croissances comparées.

Donc f est dérivable à gauche en 0, de dérivée nulle.

On aurait aussi pu calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$. Comme cette limite existe et vaut 0, on aurait conclu également. Par contre, si f' n'avait pas eu de limite, on n'aurait pas pu conclure...

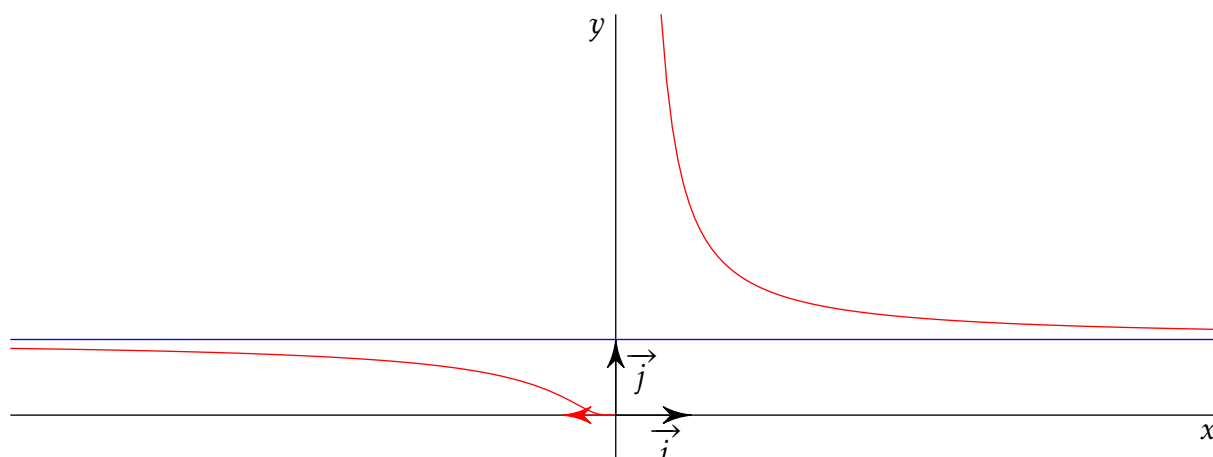
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, elle n'est donc pas continue et encore moins dérivable !

4 – La limite en $\pm\infty$ de f est 1. On a une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le tableau de variation est donc facile à établir :

x	$-\infty$	0	0^+	$+\infty$
$f'(x)$		-		-
$f(x)$	1	\searrow 0	$+\infty$	\searrow 1

5 –



II Étude d'une équation différentielle

1 – Cette équation différentielle est linéaire du premier ordre à coefficients non constants et sans second membre.

$]0, +\infty[$ est un intervalle convenable, et sur cette intervalle, les solutions sont de la forme :

$$y = K e^{-\int \frac{dx}{x^2}} = K e^{\frac{1}{x}}$$

2 – L'application $t \mapsto \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$,

donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ possède une seule singularité en $+\infty$.

On remarque que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = 0$ par équivalence puis application des croissances comparées.

Donc, pour $t \geq t_0$, avec t_0 assez grand : $0 \leq \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \leq \frac{1}{t^2}$

Comme $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge par Riemann, par comparaison des fonctions positives,

$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge.

3 – • On pose $f(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$.

Pour $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$, $\left| \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \right| \leq \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+a}$, cette dernière fonction ne dépend pas de x .

De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+a} dt$ converge, car c'est une exponentielle négative.

On en conclut que $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ est continue sur $[a, b]$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{x^2} \times \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$

Pour $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$, $\left| \frac{t}{x^2} \times \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \right| \leq \frac{t}{a^2} \times \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+t} \leq \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{a^2}$, cette dernière fonction ne dépend pas de x .

De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{a^2} dt$ converge, car c'est une exponentielle négative.

On en conclut que $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$,

et que $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} \times \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$.

4 – On a vu que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur tous les intervalles $[a, b]$, avec $0 < a < b$.

La classe \mathcal{C}^1 est une propriété locale, donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur la réunion de tous les intervalles $[a, b]$, avec $0 < a < b$, c'est à dire sur $]0, +\infty[$.

Et sur cet intervalle, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$.

On a alors : $x^2 \varphi'(x) + \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt = [-x e^{-\frac{t}{x}}]_{t=0}^{+\infty} = x$

5 – La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Donc, f est solution de \mathcal{E}_1 sur $]0, +\infty[$ si et seulement si

il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = K e^{\frac{1}{x}} + \varphi(x)$

III Détermination d'une valeur approchée

1 – Pour $t \neq -1$, $\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t}$, par somme des termes d'une suite géométrique.

Ce qui donne : $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} = \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{x}}$

Ce résultat est valable dès que $t \neq -1$, donc en particulier pour $t \geq 0$.

2 – On pose $h(t) = t^k e^{-\frac{t}{x}}$, h est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

La seule singularité de l'intégrale est en $+\infty$.

Notons aussi que h est une fonction positive.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 h(t) = 0$, par application du théorème des croissances comparées.

Donc, pour $t \geq t_0$, avec t_0 assez grand : $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{t^2}$

Comme $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge par Riemann, par comparaison des fonctions positives,

$\int_{t_0}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$ converge, puis $\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$ converge.

Pour $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$, on pose cette fois-ci $h(t) = \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$, la suite de la démonstration est **exactement** la même.

Prenons la somme demandée : $S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$
 $= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$, par linéarité des intégrales convergentes.

D'où, toujours par linéarité :

$$S = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt = \varphi(x).$$

On a bien l'égalité demandée.

$$3 - I_k(x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$$

3.1 - $I_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt = x$, ce qu'on a déjà calculé.

3.2 - On fait ici une intégration par partie dans une intégrale généralisée en $+\infty$, intégrale dont on a déjà montré la convergence.

On intègre $t \mapsto t^k$ et on dérive $t \mapsto e^{-\frac{t}{x}}$.

Pour continuer, nous avons besoin de $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-\frac{t}{x}}$ finie. C'est le cas car cette limite est nulle par application du théorème des croissances comparées.

Les deux intégrales qui vont intervenir sont donc de même nature, ici convergentes, et on a l'égalité habituelle :

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-\frac{t}{x}} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} \left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{t}{x}} dt = 0 + \frac{1}{x(k+1)} \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

$$= \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

3.3 - On montre cette formule par récurrence.

Vérification initiale

On a déjà calculé : $I_0(x) = x = 0!x^{0+1}$

Hérédité

On admet la propriété au rang k , on la montre au rang $k+1$.

On vérifie bien : $I_{k+1}(x) = x(k+1)I_k(x) = x(k+1)k!x^{k+1} = (k+1)!x^{(k+1)+1}$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, I_k(x) = k!x^{k+1}$.

$$4 - R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k k!x^{k+1}$$

4.1 - En utilisant la valeur des I_k et l'égalité montrée au III.2,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

$$\text{On a : } 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

car les fonctions sont positives et les intégrales, déjà étudiées, convergentes.

On en déduit : $|R_n(x)| \leq I_{n+1} = (n+1)!x^{n+2}$.

4.2 – Notons que la suite (u_n) est positive. Nous avons : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{10^{n+3}} \cdot \frac{10^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$.

La suite (u_n) décroît donc strictement jusque $n = 8$, puis $u_9 = u_8$, puis elle croît strictement.

Et on a $u_8 = \frac{567}{15625000} \approx 3,6288 \times 10^{-5}$.

4.3 – On a $\left| R_8\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq u_8 \leq 10^{-4}$.

Donc $\sum_{k=0}^8 (-1)^k \frac{k!}{10^{k+1}}$ est une valeur approchée de $\varphi\left(\frac{1}{10}\right)$ à 10^{-4} près.

L'énoncé ne demande pas de calcul explicite !

5 – Ce rayon de convergence s'obtient en appliquant le critère de d'ALEMBERT.

Pour $t \neq 0$, on pose $v_k = (-1)^k k! t^{k+1}$, alors $\left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = (k+1)|t| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.

Le rayon de convergence est donc nul, la série diverge grossièrement partout sauf en 0.

Elle diverge donc en $\frac{1}{10}$.

6 – On est dans le cas cité par HENRI POINCARÉ, la série étudiée diverge grossièrement mais les huit premiers termes décroissent rapidement...

IV Un peu d'algorithmique

1 – La valeur *calculée*, et non pas affichée, sera $(-1)^8 \frac{8!}{10^9}$.

La valeur *affichée* sera $\frac{63}{1562500}$ si on est en *calcul exact* ou $4,032000000 \times 10^{-4}$ si on est en *calcul approché*, ce qui est le cas ici en utilisant Maple, puisqu'on démarre avec $u = 0.1 \dots$

2 – En Maple, en prenant un paramètres n , cela donne par exemple :

```
CCPval:=proc(n)
local u,k;
u:=0.1;
for k from 1 to n do
    u:=-k*u/10
od;
u
end;
```

Le calcul, dans notre cas, se fait par : CCPval(8) ;

3 – En Maple, en prenant un paramètres n , le calcul de S donne par exemple :

```
CCPsom:=proc(n)
local u,k,S;
u:=0.1;S:=0.1;
for k from 1 to n do
    u:=-k*u/10;
    S:=S+u
od;
S
end;
```

Le calcul, dans notre cas, se fait par : CCPsom(8) ;