



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

**MATHEMATIQUES 1**

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont autorisées*

\* \* \*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\* \* \*

**EXERCICE**

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $\mathcal{H}$  la courbe d'équation  $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 2$  et  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

1. Montrer qu'il existe un repère orthonormé direct  $(O; \vec{I}, \vec{J})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer, dans lequel la courbe  $\mathcal{H}$  a pour équation  $18X^2 - 2Y^2 = 2$ .

*On pourra utiliser la calculatrice.*

2. Justifier que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole et préciser son excentricité.
3. Reconnaître la courbe  $\mathcal{C}$ . En déduire une équation de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .
4. Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}$  se coupent en quatre points  $A, B, C$  et  $D$  dont on donnera les coordonnées dans le repère  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .
5. Prouver que les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  forment un rectangle et donner son aire.
6. Donner les coordonnées des sommets, des équations des asymptotes et des équations des tangentes aux sommets de l'hyperbole dans le repère  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .
7. Représenter graphiquement dans le repère  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ , la courbe  $\mathcal{C}$  et l'hyperbole  $\mathcal{H}$  avec ses asymptotes, ses sommets et ses tangentes en ses sommets.

*N.B. : On ne demande pas de faire apparaître le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .*

## PROBLÈME

Ce problème comporte trois parties. Les parties A et B peuvent se traiter de façon indépendante. On peut utiliser certains résultats de la partie B pour traiter la partie C.

### Notations

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  colonnes à coefficients réels. On note  ${}^tM$  la transposée de la matrice  $M$ .

On appelle vecteur colonne de  $\mathbb{R}^n$  toute matrice à  $n$  lignes et 1 colonne à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

### Définitions

On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la

somme de ces coefficients vaut 1. Par exemple le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix}$  est stochastique car

$0,3 \geq 0$  et  $0,6 \geq 0$  et  $0,1 \geq 0$  et  $0,3 + 0,6 + 0,1 = 1$ .

On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque chacune de ses colonnes l'est.

### Partie A

#### *Un exemple en dimension 3*

Dans cette partie, on étudie les trois suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}; z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} :$$

$$(R) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n + \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} = \frac{3}{10}x_n + \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} = \frac{3}{5}y_n + \frac{2}{5}z_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que le système (R) s'écrit sous forme matricielle  $X_{n+1} = AX_n$  avec  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  que l'on déterminera.
2. Justifier que la matrice carrée  $A$  est stochastique.
3. Écrire un programme dans le langage de Maple ou Mathematica qui calcule le vecteur colonne  $X_{2010}$ .
4. Calculer la trace de  $A$  notée  $\text{Tr}(A)$  et le déterminant de  $A$  noté  $\det(A)$ . On pourra utiliser la calculatrice. La matrice  $A$  est-elle inversible ?

5. Prouver que le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de la matrice  ${}^t A$ . Quelle est la valeur propre associée ?
6. On pourra admettre les résultats demandés ici pour traiter la question suivante.  
Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- (a) Montrer que les matrices  $M$  et  ${}^t M$  ont le même polynôme caractéristique.
- (b) Établir que  $M$  admet trois valeurs propres complexes (éventuellement non distinctes) que l'on note  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  et que :  $\text{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ .
7. Dédurre des questions précédentes que les valeurs propres de  $A$  sont  $0, \frac{1}{10}$  et  $1$ .
8. Justifier qu'il existe une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  avec
- $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels que l'on déterminera.}$$
9. Calculer  $P^{-1}$ . On pourra utiliser la calculatrice.
10. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $X_n = PD^n P^{-1} X_0$ .
11. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (a) Exprimer  $X_n$  en fonction de  $n$ .
- (b) Montrer que le vecteur colonne  $X_n$  est stochastique.
12. Prouver que la suite  $(x_n)$  (respectivement  $(y_n)$  et  $(z_n)$ ) est convergente vers une limite, notée  $l_x$  (respectivement  $l_y$  et  $l_z$ ).
13. Prouver que le vecteur colonne  $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$  est stochastique et est vecteur propre de  $A$ .

## Partie B

### Cas de la dimension 2

Soit  $A$  une matrice carrée stochastique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On considère une suite  $(X_n)$  de vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $X_0$  est stochastique et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .

1. Montrer qu'il existe  $a$  et  $b$  deux réels de  $[0, 1]$  tels que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ .

On définit deux suites réelles  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .

2. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le vecteur colonne  $X_n$  est stochastique. Il s'agit d'établir que  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$  et  $x_n + y_n = 1$ .

3. Montrer que  $0 \leq \text{Tr}(A) \leq 2$ .

4. (a) On suppose que  $\text{Tr}(A) = 0$ .

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Que vaut  $A^2$  ? Que se passe-t-il pour la suite  $(X_n)$  ?

- (b) On suppose que  $\text{Tr}(A) = 2$ .

Que vaut  $A$  ? Que se passe-t-il pour la suite  $(X_n)$  ?

On suppose désormais que  $0 < \text{Tr}(A) < 2$ .

5. Montrer que  $-1 < a - b < 1$ .

Soit  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^2$ .

6. (a) Montrer que  $V$  est un vecteur propre de  $A$ . Exprimer la valeur propre associée que l'on note  $q$ , en fonction de  $a$  et  $b$ .

(b) Prouver que  $|q| < 1$ .

7. Établir que 1 est une valeur propre de  $A$ .

8. Prouver que la matrice  $A$  est diagonalisable.

9. On pourra admettre le résultat demandé ici pour traiter la suite.

Établir qu'il existe un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^2$ ,  $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$  et un réel  $\lambda$  vérifiant :

$$AL = L \text{ et } X_0 = L + \lambda V.$$

On ne cherchera pas à calculer  $l_x, l_y$  et  $\lambda$ .

10. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $X_n = L + q^n \lambda V$ .

11. Prouver que la suite  $(x_n)$  (respectivement  $(y_n)$ ) est convergente vers  $l_x$  (respectivement  $l_y$ ).

12. En déduire que le vecteur colonne  $L$  est stochastique. On pourra utiliser B.2.

13. Soit  $T$  un vecteur colonne stochastique de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $AT = T$ . Montrer que  $T = L$ .

## Partie C

### Un cas particulier

On reprend les notations de la partie B.

Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice  $A$  n'est pas inversible.

1. Montrer que la matrice  $A$  est de rang 1.

2. Montrer qu'il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$ .

3. Établir alors que  $A^2 = A$ .

4. Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = AX_0$ .

Soit  $E$  un plan euclidien muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  associé à la matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

5. Montrer que l'application linéaire  $f$  est un projecteur.

6. Donner dans la base  $\mathcal{B}$ , une équation de  $\text{Ker } f$  et une équation de  $\text{Im } f$ .

7. En déduire que l'endomorphisme  $f$  est une projection orthogonale si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

8. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On note  $\vec{u}(\theta)$  le vecteur de coordonnées  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Établir que  $\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4})$ .

9. En déduire les valeurs de  $\frac{\|f(\vec{i})\|}{\|\vec{i}\|}$  et  $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|}$  en fonction de  $\alpha$ .

10. Démontrer que  $f$  est une projection orthogonale si, et seulement si, pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a :  $\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$ .

**Fin de l'énoncé**