Exercice

1. Il suffit de réduire la forme quadratique dans une base orthonormale qu'on choisira directe.

   Sa matrice dans la base départ est : $M = \begin{pmatrix} 3 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$

   Son polynôme caractéristique est : $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 18\lambda - 36 = (\lambda - 18)(\lambda + 2)$

   Les deux valeurs propres sont 18 et -2, simples. Les sous-espace propres sont de dimension 1 et orthogonaux.

   Dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, pris dans l'ordre des valeurs propres 18 puis -2, la forme quadratique est : $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 18X^2 - 2Y^2$.

   L'équation de $\mathcal{H}$ devient donc, dans le repère $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$: $18X^2 - 2Y^2 = 2$, ou encore, $9X^2 - Y^2 = 1$.

2. $9X^2 - Y^2 = 1$ s'écrit encore $\dfrac{X^2}{(1/3)^2} - \dfrac{Y^2}{1^2} = 1$.

   C'est une hyperbole : $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$, et l'excentricité : $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{10}$.

3. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, il a la même équation dans tous les repères orthonormaux centrés à l'origine.

   Dans le repère $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$, son équation est donc : $X^2 + Y^2 = 1$.

4. On travaille dans le repère $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$.

   $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ est formé de l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} 9X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

   Ajouter ces deux équations donne $5X^2 = 1$, ou $X^2 = \dfrac{1}{5}$, on réinjecte ce résultat dans la seconde pour obtenir $Y^2 = \dfrac{4}{5}$.

   Ces deux dernières équation forment un système équivalent au système de départ.

   Ceci donne 4 points $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ et $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

5. On a $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est un parallélogramme.

   D'autre part $\overrightarrow{AD}\left(0, -\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, c'est un rectangle.

   Son aire est le produit des longueurs des cotés : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$, l'aire est donc : $\dfrac{8}{5}$.

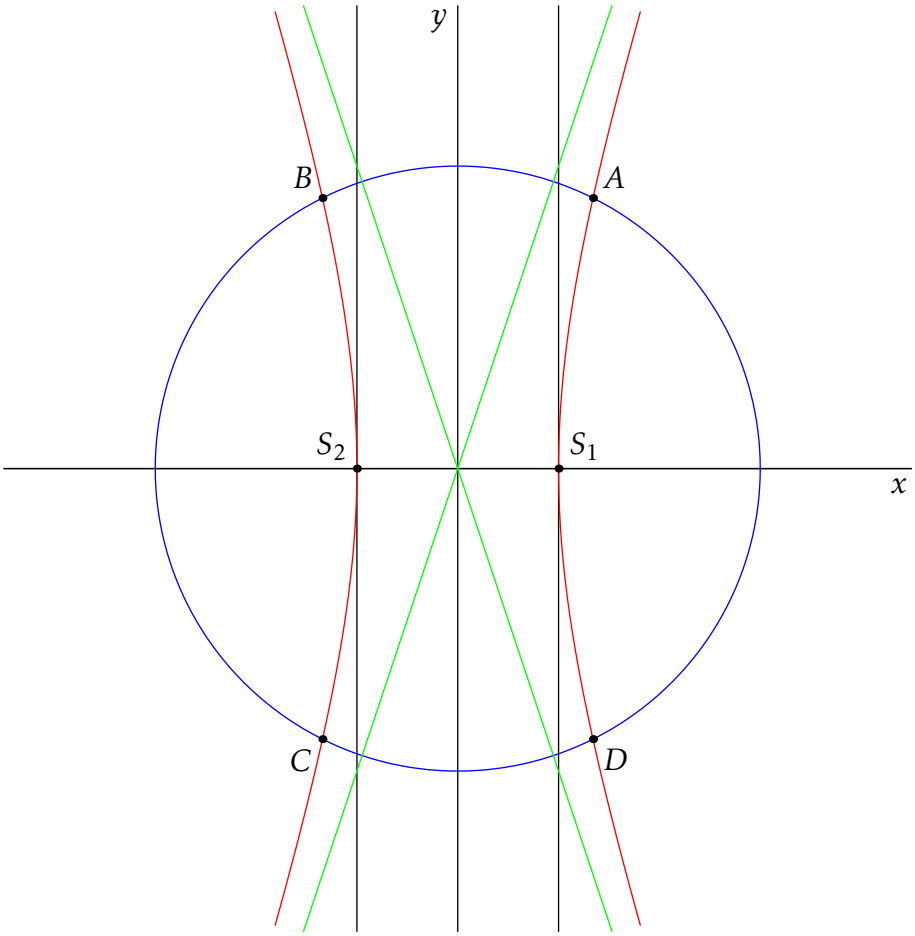
6. Les sommets sont : $S_1\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ et $S_2\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

   Les asymptotes s'obtiennent par $9X^2 - Y^2 = 0$, ce sont les droites $\mathscr{D}_1$ d'équation $Y = 3X$, et $\mathscr{D}_2$ d'équation $Y = -3X$.

   Les tangentes aux sommets dont les droites $\mathscr{T}_1$ d'équation $X = \dfrac{1}{3}$, et $\mathscr{T}_2$ d'équation $X = -\dfrac{1}{3}$.

7. Le graphe

   Le cercle étant le cercle trigonométrique, on n'a pas reporté les vecteurs unitaires.



Problème

Partie A

1. Clairement, la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ convient.
2. $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, et, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$, la matrice est bien stochastique.
3. On admet qu'on veut la valeur exact de X et que le module *linalg* est chargé.
   Initialisation des variables :

```
X0:=vector([1/2,1/2,0]);A0:=matrix([[7/10,2/5,1/2],[3/10,0,1/10],[0,3/5,2/5]]);
```

   La procédure elle-même :

```
CCP:=proc(A0,X0,n)
local A,X,p;
A:=A0;X:=X0;
for p from 1 to n do
   X:=A&*X
od;
X
end;
```

Appel de la procédure :

```
CCP(A0,X0,2010);
```

qui « donne » le résultat.

4. $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{11}{10}$,
tandis que, en développant selon la première colonne :
$\det(A) = -\dfrac{21}{500} - \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{-21-24+45}{500} = 0$
Son déterminant est nul, donc A n'est pas inversible.

5. ${}^tA = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Et donc : ${}^tA\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc propre pour ${}^tA$ et la valeur propre 1.

C'est d'ailleurs une propriété de toutes les matrices stochastiques.

6. (a) $\det\left({}^t(M - \lambda I_3)\right) = \det(M - \lambda I_3)$, car une matrice et sa transposée on le même déterminant.
On a bien ${}^tM$ et M qui ont le même polynôme caractéristique.

   (b) Le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, donc M admet 3 valeurs propres distinctes ou confondues.
Par théorème, quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace est la somme des valeurs propres : $\mathrm{Tr}\,(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

7. • Le déterminant est nu, donc 0 est valeur propre de A.
   • 1 est valeur propre de ${}^tA$, donc de A.
   • La trace vaut $\dfrac{11}{10}$, donc la dernière valeur propre est : $\dfrac{11}{10} - 0 - 1 = \dfrac{1}{10}$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$, simple, $\lambda_2 = \dfrac{1}{10}$, simple, et, $\lambda_3 = 0$, simple aussi.

8. A est donc diagonalisable, il existe donc P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

P est constitué en colonne de vecteurs propres de A pour, respectivement, les valeurs propres 1, 1/10 et 0.

Il nous faut donc :

– Montrer que $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

– Trouver a tel que $\begin{pmatrix}1\\a\\-2\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1/10.

– Trouver b tel que $\begin{pmatrix}1\\2\\b\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 0.

Ceci se fait facilement :

- *Premier vecteur propre*

$$\begin{pmatrix}\frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

- *Second vecteur propre*

$$\begin{pmatrix}\frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}a-\frac{3}{10}\\ \frac{1}{10}\\ \frac{3}{5}a-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\a\\-2\end{pmatrix}$$

Pour $a=1$, le dernier vecteur vaut $\begin{pmatrix}\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10}\\ -\frac{2}{10}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$a=1$ convient donc.

- *Troisième vecteur propre*

$$\begin{pmatrix}\frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+\frac{b}{2}\\ \frac{3}{10}+\frac{b}{10}\\ \frac{6}{5}+\frac{2b}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pour $b=-3$, le dernier vecteur vaut $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$b=-3$ convient donc.

On a la matrice $P=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ qui est telle que $P^{-1}AP=D$.

9. On peut inverser la matrice à la calculatrice ou en inversant le système : $\begin{cases}3x+y+z=X\\ x+y+2z=Y\\ x-2y-3z=Z\end{cases}$

On fait $L_1+L_2+L_3\to L_1$, $L_1-3L_2\to L_2$ et $L_2-L_3\to L_3$,

on a bien un système équivalent : $\begin{cases}5x=X+Y+Z\\ -2y-5z=X-3Y\\ 3y+5z=Y-Z\end{cases}$

Maintenant, $L_2+L_3\to L_2$ donne : $\begin{cases}5x=X+Y+Z\\ y=X-2Y-Z\\ 3y+5z=Y-Z\end{cases}$

Enfin, $L_3 - 3L_2 \to L_3$ puis $5L_2 \to L_2$ donne : $\begin{cases} 5x = X + Y + Z \\ 5y = 5X - 10Y - 5Z \\ 5z = -3X + 7Y + 2Z \end{cases}$

Ce qui prouve que $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

10. *Vérification initiale*
Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$, donc $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et enfin $PD^0P^{-1}X_0 = X_0$, le résultat est vérifié.
Hérédité
On admet le résultat au rang n, on le montre au rang $n+1$.
$X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}X_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$
Conclusion
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = PD^nP^{-1}X_0$

11. (a) $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } X_n = \frac{1}{5}PD^n\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}PD^n\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}P\begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{-5}{10^n} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{-5}{10^n} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 - \dfrac{5}{10^n} \\ 2 - \dfrac{5}{10^n} \\ 2 + \dfrac{10}{10^n} \end{pmatrix}$$

(b) $\dfrac{1}{10}\left(6 - \dfrac{5}{10^n} + 2 - \dfrac{5}{10^n} + 2 + \dfrac{10}{10^n}\right) = 1$,
de plus, pour $n \geqslant 1$, ses coordonnées sont positives, le vecteur X_n est bien stochastique.

12. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10}\left(6 - \dfrac{5}{10^n}\right) = \dfrac{3}{5}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10}\left(2 - \dfrac{5}{10^n}\right) = \dfrac{1}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10}\left(2 + \dfrac{5}{10^n}\right) = \dfrac{1}{5}$
Les trois suites des coordonnées convergent bien.

13. Donc $L = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$,
$\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} = 1$, de plus, ses coordonnées sont positives, ce vecteur est bien stochastique.
Il est aussi colinéaire au premier vecteur colone de P, donc propre pour la valeur propre 1.

Partie B

1. A est une matrice 2×2, stochastique, de première ligne (a, b),
sa deuxième ligne est donc $(1 - a, 1 - b)$.

Comme tous ses termes doivent être positifs, on a $a \geqslant 0$ et $1-a \geqslant 0$, c'est à dire $a \in [0,1]$, et on a aussi $b \geqslant 0$ et $1-b \geqslant 0$, c'est à dire $b \in [0,1]$.

Il existe bien a et b dans $[0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. *Vérification initiale*
   X_0 est stochastique par hypothèse.
   Hérédité
   On suppose X_n stochastique, on montre que X_{n+1} est aussi stochastique.
   $X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1-a)\,x_n + (1-b)\,y_n \end{pmatrix}$
   Tous les nombres intervenant dans le calcul des coordonnées de X_{n+1} son positifs, donc ses coordonnées sont positives.
   De plus $ax_n + by_n + (1-a)\,x_n + (1-b)\,y_n = x_n + y_n = 1$, X_{n+1} est bien stochastique.
   Conclusion
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n$ est stochastique.
3. $\mathrm{Tr}\,(A) = a + (1-b) \in [0,2]$ puisque chaque terme est dans $[0,1]$.
4. (a) Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, alors $a = 0$ et $(1-b) = 0$, c'est à dire $b = 1$. Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
   Par récurrence élémentaire, $A^{2n} = I_2$, et, $A^{2n+1} = A$,
   et toujours par récurrence élémentaire, $X_n = A^n X_0$, ce qui prouve que $X_{2n+1} = X_1$ et $X_{2n} = X_0$.
   Dans ce cas, la suite (X_n) est périodique de période 2.
   (b) Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, alors $a = 1$ et $(1-b) = 1$, c'est à dire $b = 0$.
   Alors $A = I_2$ et la suite (X_n) est clairement constante égale à X_0.
5. Si $\mathrm{Tr}\,(A) \in]0,2[$, alors $0 < a + (1-b) < 2$, ce qui équivaut à $-1 < a - b < 1$.
6. (a) $AV = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ (1-a)-(1-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)\,V$
   V est propre pour A et la valeur propre $q = a - b$.
   (b) $-1 < a - b < 1 \Leftrightarrow |a-b| < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$
7. $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 + a - b$ est la somme des valeurs propres.
   La seconde valeur propre est donc 1, distincte de q.
8. A possède donc deux valeurs propres simples et est donc diagonalisable.
9. 1 est valeur propre de A, donc, il existe un vecteur propre U associé.
   (U, V) forme donc une base de $\mathbb{R}^2$, donc il existe μ et λ tels que $X_0 = \mu U + \lambda V$.
   On pose $L = \mu U$, $L \in \mathrm{Vect}\,(U)$ entraîne $AL = L$, avec : $X_0 = L + \lambda V$.
10. *Vérification initiale*
    Pour $n = 0$, $X_0 = L + \lambda V = L + q^0 \lambda V$
    Hérédité
    On l'admet au rang n. Alors $X_{n+1} = AX_n = A\,(L + q^n \lambda V) = AL + q^n \lambda AV = L + q^n \lambda q V = L + q^{n+1} \lambda V$.
    Conclusion
    On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = L + q^n \lambda V$.
11. $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x + q^n \lambda \\ l_y + q^n \lambda \end{pmatrix}$.
    Or $q^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ car $|q| < 1$, d'où, $x_n \to l_x$ et $y_n \to l_y$ quand $n \to +\infty$.
12. $X_0 = \begin{pmatrix} l_x + \lambda \\ l_y - \lambda \end{pmatrix}$ est stochastique, donc $(l_x + \lambda) + \left(l_y - \lambda\right) = l_x + l_y = 1$.
    Donc L est stochastique.
    Contrairement à ce que dit l'énoncé, on n'a pas besoin du **B.2.**

13. L est stochastique, donc non nul. Comme $AL = L$, L est donc propre pour la valeur propre 1, et enfin une base du sous-espace propre associé puisque celui ci est de dimension 1.

    Si $AT = T$, alors $T = kL = \begin{pmatrix} kl_x \\ kl_y \end{pmatrix}$.

    Comme T est stochastique, $kl_x + kl_y = 1$, mais $kl_x + kl_y = k\left(l_x + l_y\right) = k$.
    Ce qui donne $k = 1$ et $T = L$.

Partie C

1. A n'est pas inversible, elle n'est donc pas de rang 2.
   A est stochastique, donc non nulle, et n'est donc pas de rang 0.
   A est donc de rang 1.
2. On se souvient que les valeurs propres étaient 1 et $a - b$, ici comme 0 est valeur propre, c'est 1 et 0.

   Donc $a = b$, et si on appelle cette quantité α, qui appartient donc à $[0, 1]$, alors : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.
3. Un calcul simple donne :
   $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha(1-\alpha) & \alpha^2 + \alpha(1-\alpha) \\ (1-\alpha)\alpha + (1-\alpha)^2 & (1-\alpha)\alpha + (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = A$
4. On montre ce résultat par récurrence.
   On a $X_1 = AX_0$, et si on admet que $X_n = AX_0$ pou $n \geqslant 1$, alors : $X_{n+1} = AX_n = A(AX_0) = A^2X_0 = AX_0$.
   Ce qui donne : $X_{n+1} = aX_0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $A^2 = A$ nous donne $f \circ f = f$, c'est à dire que f est un projecteur.
   C'est même une équivalence.
6. Le noyau et l'image sont de dimension 1, l'image à cause du rang et le noyau par application du théorème du rang.

   La recherche du noyau de f conduit aux équations : $\begin{cases} \alpha(x+y) = 0 \\ (1-\alpha)(x+y) = 0 \end{cases}$

   $\ker(f)$ est donc d'équation : $x + y = 0$.

   $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par par $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$, c'est donc la droite vectorielle d'équation : $(1-\alpha)x - \alpha y = 0$.
7. On aura une projection orthogonale si et seulement si ce noyau et cette image sont orthogonaux, c'est à dire $(1-\alpha) - \alpha = 0$, ou encore $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
8. $A\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\cos\theta + \sin\theta) \\ (1-\alpha)(\cos\theta + \sin\theta) \end{pmatrix} = \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4)\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$
   La base étant orthonormale, on en déduit :
   $\left\|f\left(\vec{u}(\theta)\right)\right\|^2 = 2\sin^2(\theta + \pi/4)\left(\alpha^2 + (1-\alpha)^2\right) = \sin^2(\theta + \pi/4)\left(4\alpha^2 - 4\alpha + 2\right)$
   $= \sin^2(\theta + \pi/4)\left(\left(2\alpha^2 - 1\right)^2 + 1\right)$.
9. $\vec{u}(\theta) = \vec{\imath}$ donne $\theta = 0$.

   Donc : $\left\|f\left(\vec{\imath}\right)\right\|^2 = \dfrac{1}{2}\left(\left(2\alpha^2 - 1\right)^2 + 1\right) = \dfrac{\left(2\alpha^2 - 1\right)^2 + 1}{2}$.

   Et enfin : $\dfrac{\left\|f\left(\vec{\imath}\right)\right\|}{\left\|\vec{\imath}\right\|} = \sqrt{\dfrac{\left(2\alpha^2 - 1\right)^2 + 1}{2}}$.

   Notons que $\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$ est propre pour la valeur propre 1, donc $\dfrac{\left\|f\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)\right\|}{\left\|\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right\|} = 1$.

10. ($\Rightarrow$) Si f est une projection orthogonale, alors, $\alpha = 1/2$ et $\left\|f\left(\overrightarrow{u}(\theta)\right)\right\|^2 = \sin^2(\theta + \pi/4)$.

    En appelant θ l'argument d'un vecteur $\overrightarrow{x}$, on obtient $\left\|f\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|^2 = \sin^2(\theta + \pi/4)\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$, ce qui implique bien $\left\|f\left(\overrightarrow{x}\right)\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{x}\right\|$.

    ($\Leftarrow$) Si $\alpha \neq 1/2$, pour $\theta = \pi/4$, $\left\|f\left(\overrightarrow{u}(\theta)\right)\right\|^2 > 1 = \left\|\overrightarrow{u}(\theta)\right\|^2$.

    On a bien l'équivalence demandée.