



MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Remettre à chaque candidat une feuille de papier millimétré

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On considère le plan vectoriel euclidien \mathcal{P} rapporté à une base orthonormée $\mathcal{K}_0 = \vec{i}, \vec{j}$.

Pour les dessins, on munira la feuille de papier millimétré d'une origine O placée au centre de la feuille et on représentera le vecteur \vec{m} par le point M tel que $\vec{m} = \overline{OM}$.

Soit $\mathcal{K} = \vec{I}, \vec{J}$ une autre base de \mathcal{P} , **non nécessairement orthonormée**. Si \vec{m} est un vecteur de \mathcal{P} , on notera x, y ses coordonnées dans \mathcal{K}_0 et u, v ses coordonnées dans \mathcal{K} . On notera X et U les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et on notera P la matrice de passage de \mathcal{K}_0 à \mathcal{K} .

On s'intéresse à la courbe γ d'équation $u^2 + v^2 = 1$ (on notera qu'il s'agit d'une équation donnée dans la base \mathcal{K}).

La transposée d'une matrice A se notera ${}^t A$.

On munit \mathbb{R}^2 de son produit scalaire usuel : si Y et Z sont deux éléments de \mathbb{R}^2 avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et

$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ on pose $Y|Z = {}^t YZ = y_1 z_1 + y_2 z_2$; on définit également : $\|Y\| = \sqrt{Y|Y}$ la norme de Y .

Préliminaire

Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour faire certains calculs à condition de le mentionner sur votre copie

P1a – Donner une relation entre les matrices P , X et U .

P1b – Considérons l'exemple suivant : $\vec{I} = 2\vec{i}$ et $\vec{J} = \vec{j}$. Justifier sommairement sans utiliser la relation ci-dessus qu'on a alors :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}x \\ v = y \end{cases}.$$

Écrire la matrice P correspondante, puis vérifier sur cet exemple la validité de la formule obtenue au P1a.

P2 – Quelle est la nature de γ lorsque \mathcal{K} est orthonormée ?

P3a – Pour $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donner la matrice inverse $Q_0 = P_0^{-1}$.

P3b – Calculer la matrice $A_0 = {}^t Q_0 Q_0$. Déterminer les valeurs propres de A_0 , puis donner une matrice orthogonale R_0 et une matrice diagonale D_0 telles que $R_0^{-1} A_0 R_0 = D_0$.

P4 – Soient trois réels a , b et c vérifiant $ab - c^2 > 0$. Justifier sommairement que la courbe \mathcal{C} d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy = 1$ (dans \mathcal{K}_0) est soit une ellipse, soit un cercle, soit l'ensemble vide.

Partie I

Étude d'un exemple

On suppose dans cette partie que $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On appelle $D_{\vec{I}}$ et $D_{\vec{J}}$ les droites engendrées respectivement par \vec{I} et par \vec{J} . Soit s la symétrie par rapport à $D_{\vec{I}}$ et de direction $D_{\vec{J}}$.

I.1 – Donner les coordonnées u', v' dans \mathcal{K} de $s \vec{m}$ en fonction des coordonnées u, v de \vec{m} dans \mathcal{K} .

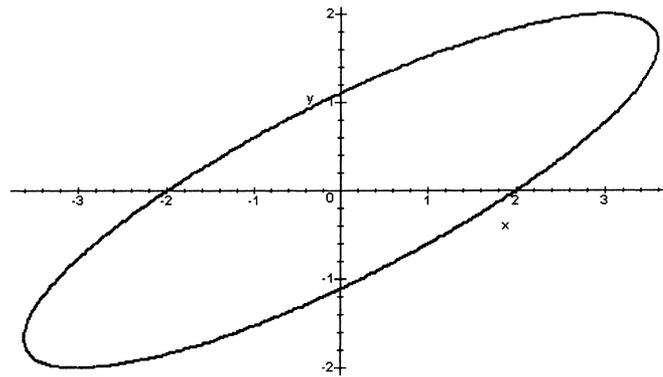
I.2 – On appelle γ^+ l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \geq 0$, ainsi que γ^- l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \leq 0$.

Justifier que $\gamma^- = s \gamma^+$, puis que γ est la réunion de γ^+ et de $s \gamma^+$.

I.3 – Prouver que si $\vec{m} \in \gamma$, alors $u \in]-1; 1[$.

I.4 – Déterminer alors une fonction φ définie sur $]-1; 1[$ telle que γ^+ soit la courbe représentative de φ dans la base \mathcal{K} .

I.5 – Le dessin de γ est le suivant :



Expliquer en quoi les résultats des questions I.1 à I.4 permettent de l'obtenir. Décrire quelle est la partie du dessin correspondant à γ^+ .

I.6 – Donner l'expression des coordonnées u, v d'un vecteur \vec{m} dans \mathcal{B} en fonction de ses coordonnées x, y dans \mathcal{B}_0 . En déduire qu'une équation de γ est :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{13}{16}y^2 = 1.$$

I.7 – Justifier que γ est une ellipse dont on donnera un vecteur directeur de chacun des deux axes, les demi-longueurs a et b du grand et du petit axe, ainsi que l'excentricité e . On pourra utiliser la réduction de la matrice A_0 de la question P3.

Partie II

Détermination de la nature de γ dans le cas général

On revient au cas général. La matrice P désigne donc une matrice inversible quelconque d'ordre 2.

II.1 – Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tUU = 1$.

II.2 – On pose $Q = P^{-1}$ et $A = {}^tQQ$. Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tXAX = 1$.

II.3 – Montrer que A est symétrique. En déduire qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B}' dans laquelle l'équation de γ est : $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A et où x', y' désigne les coordonnées de \vec{m} dans \mathcal{B}' .

II.4 – Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Montrer que $\|QX\|^2 = \lambda \|X\|^2$. En déduire que les valeurs propres de A sont positives.

II.5 – Montrer que A est inversible ; en déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

II.6 – Justifier que γ est un cercle ou une ellipse dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres de A .

Partie III

Une construction géométrique de γ

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans \mathcal{K}_0 est P et soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1.
On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant :

Si C est une courbe de \mathcal{P} ayant pour tangente T en \vec{a} , et si φ est un endomorphisme bijectif de \mathcal{P} , alors φC est une courbe qui admet φT pour tangente en $\varphi \vec{a}$.

On rappelle par ailleurs qu'on identifie le vecteur \vec{a} avec le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

III.1 – Soit \vec{m} de coordonnées x, y dans \mathcal{K}_0 . On appelle u', v' les coordonnées de $f \vec{m}$ dans \mathcal{K} .
Établir que $x, y = u', v'$.

III.2 – En déduire que $\gamma = f \mathcal{C}$.

III.3 – En utilisant la droite D d'équation $x = 1$ (dans \mathcal{K}_0), montrer que la droite Δ d'équation $u = 1$ (dans \mathcal{K}) est tangente à γ au point de coordonnées $(1, 0)$ dans \mathcal{K} .

Déterminer de même la tangente à γ en trois autres points.

III.4 – Soit $\lambda \in]0; 1[$.

On considère les deux droites $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ définies comme suit (les coordonnées sont données dans \mathcal{K}_0) :

- $D_{1,\lambda}$ passe par $A(1,0)$ et par $B_\lambda(1-\lambda, 1)$.
- $D_{2,\lambda}$ passe par $C(-1,0)$ et par $D_\lambda(0,\lambda)$.

Prouver que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont orthogonales.

Justifier alors que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont sécantes en un point m_λ de \mathcal{C} , puis en déduire une construction du point $n_\lambda = f m_\lambda$.

III.5 – Construire par cette méthode sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, l'ellipse obtenue pour la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On prendra pour ce faire différentes valeurs de λ entre 0 et 1 et on complétera la courbe obtenue par symétrie. On choisira 2 cm pour unité. On fera également figurer certaines tangentes remarquables.

III.6 – Soit K un parallélogramme et soit $\mathcal{A}(K)$ son aire. Montrer que l'aire de $f(K)$ est $|\det f| \mathcal{A}(K)$.

On admet que plus généralement, si K est une partie de \mathcal{P} d'aire $\mathcal{A}(K)$ finie, alors l'aire de $f(K)$ est $|\det f| \mathcal{A}(K)$.

En déduire l'aire de la partie bornée du plan délimitée par γ .

Fin de l'énoncé