Concours communs polytechniques 2009 - TSI **Mathématiques 2**

Préliminaire

P.1.a) $\boxed{X = PU}$.

P.1.b) Si $\overrightarrow{OM} = u.\vec{I} + v.\vec{J}$ alors $\overrightarrow{OM} = 2u.\vec{i} + v.\vec{j}$.

On a donc $2u.\vec{i} + v.\vec{j} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ d'où $\begin{cases} 2u = x \\ v = y \end{cases}$ car la famille $(\vec{i}, \vec{j})$ est libre.

Par suite, $\boxed{\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}x \\ v = y \end{cases}}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne bien $P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

P.2) Si B est une base orthonormée alors $u^2 + v^2 = OM^2$ donc $M \in \gamma \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1$.

$\boxed{\text{Si } B \text{ est orthonormée alors } \gamma \text{ est le cercle de centre O et de rayon 1}}$.

P.3.a) Si $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(P_0) = 4 \neq 0$ donc P_0 est inversible.

$Q_0 = P_0^{-1} = \dfrac{1}{\det(P_0)}\,{}^t\mathrm{Com}(P_0) = \dfrac{1}{4}\,{}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{Q_0 = P_0^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

P.3.b) $A_0 = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A_0 = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}}$.

La matrice A_0 est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_0.

$P_{A_0}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A_0).\lambda + \det(A_0) = \lambda^2 - \dfrac{17}{16}\lambda + \dfrac{1}{16} = \left(\lambda - \dfrac{1}{16}\right)(\lambda - 1)$ donc $\boxed{\mathrm{sp}(A_0) = \left\{\dfrac{1}{16}, 1\right\}}$.

→ $(x, y) \in E_{1/16}(A_0) \Leftrightarrow x = 2y$. On choisit $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

→ $(x, y) \in E_1(A_0) \Leftrightarrow y = -2x$. On choisit $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$.

$\boxed{D_0 = R_0^{-1}.A_0.R_0 \text{ avec } D_0 = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } R_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in O(2)}$.

P.4) La matrice de la forme quadratique $ax^2 + by^2 + 2cxy$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.
C'est une matrice symétrique à coefficients réels donc elles est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A.
Le produit de ses valeurs propres est donc égal à son déterminant $ab - c^2 > 0$.
Ses deux valeurs propres sont donc deux réels α et β non nuls et de même signe.

Dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_0, C a pour équation: $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

→ Si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ alors $C = \varnothing$.

→ Si $\alpha = \beta > 0$ alors C est le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

→ Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$ alors C est une ellipse.

Partie I *Etude d'un exemple*

I.1) $\overrightarrow{m}$ a pour coordonnées (u, v) dans la base B signifie $\overrightarrow{OM} = u.\overrightarrow{I} + v.\overrightarrow{J}$

$s(\overrightarrow{m}) = u.\overrightarrow{I} - v.\overrightarrow{J}$ car $u.\overrightarrow{I} \in D_I$ et $v.\overrightarrow{J} \in D_J$.

Donc $\boxed{(u', v') = (u, -v)}$.

I.2) $M(u, v) \in \gamma^+ \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (-v)^2 = 1 \\ -v \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow s(M) \in \gamma^-$.

Donc $\boxed{\gamma^- = s(\gamma^+)}$.

$M(u, v) \in \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \leq 0 \text{ ou } v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \leq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in \gamma^- \cup \gamma^+$.

Donc $\boxed{\gamma = \gamma^- \cup \gamma^+}$.

I.3) $\overrightarrow{m}(u, v) \in \gamma \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$ donc $\overrightarrow{m}(u, v) \in \gamma \Rightarrow u^2 \leq 1$ soit $-1 \leq u \leq 1$.

$\boxed{\overrightarrow{m}(u, v) \in \gamma \Rightarrow u \in [-1, 1]}$.

I.4) $u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow v^2 = 1 - u^2$. Si $v \geq 0$ alors $u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow v = \sqrt{1 - u^2}$.

Donc γ^+ est la courbe représentative de la fonction $\boxed{\varphi : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \sqrt{1 - u^2} \end{cases}}$.

I.5)

→ Les questions 1.1 et 1.2 indique que si on trace γ^+ (partie de la courbe au dessus de D_I) on obtient γ^- (partie de la courbe au dessous de D_I) par symétrie (non orthogonale) par rapport à D_I dans la direction de D_J.

→ La question 1.3 indique que u varie de -1 à 1.

→ La question 1.4 dit que γ^+ est la courbe représentative de la fonction φ: $u \in [-1, 1] \longmapsto \sqrt{1 - u^2}$.

On trace alors le vecteur $\overrightarrow{I} = 2\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{J} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

On trace la représentation graphique de φ dans le repère non orthonormal $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

On trace enfin la symétrie de cette courbe par rapport à D_I dans la direction de D_J.

I.6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce qui donne $\boxed{\begin{cases} u = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y \\ v = \frac{1}{2}y \end{cases}}$.

$u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{9}{16}y^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

Dans B_0, une équation de γ est donc $\boxed{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{13}{16}y^2 = 1}$.

I.7) On se place dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ définie au P.3.b.

Dans cette base, une équation de γ est $\frac{X^2}{4^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1$.

On reconnait une ellipse de centre O, de grand axe dirigé par $\overrightarrow{e_1}$ et de petit axe dirigé par $\overrightarrow{e_2}$.
$a = 4$ et $b = 1$ donnent $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$ et $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Partie II *Détermination de la nature de γ dans le cas général*

II.1) $^t\mathrm{U}.\mathrm{U} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$. Donc $\boxed{\overrightarrow{m} \in \gamma \Leftrightarrow {}^t\mathrm{U}.\mathrm{U} = 1}$.

II.2) On note $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Q}$ et $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{Q}.\mathrm{Q}$.

$\mathrm{X} = \mathrm{P}.\mathrm{U} \Leftrightarrow \mathrm{U} = \mathrm{P}^{-1}.\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{U} = \mathrm{Q}.\mathrm{X}$ et ${}^t\mathrm{U} = {}^t\mathrm{X}.{}^t\mathrm{Q}$.

Dès lors ${}^t\mathrm{U}.\mathrm{U} = 1 \Leftrightarrow {}^t\mathrm{X}.{}^t\mathrm{Q}.\mathrm{Q}.\mathrm{X} = 1 \Leftrightarrow {}^t\mathrm{X}.\mathrm{A}.\mathrm{X} = 1$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{m} \in \gamma \Leftrightarrow {}^t\mathrm{X}.\mathrm{A}.\mathrm{X} = 1}$.

II.3) $\to$ ${}^t\mathrm{A} = {}^t({}^t\mathrm{Q}.\mathrm{Q}) = {}^t\mathrm{Q}.{}^t({}^t\mathrm{Q}) = {}^t\mathrm{Q}.\mathrm{Q} = \mathrm{A}$ donc $\boxed{\text{A est symétrique}}$.

$\to$ A est symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A.
Par suite, on peut trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que: $\mathrm{A} = \mathrm{P}.\mathrm{D}.{}^t\mathrm{P}$ (${}^t\mathrm{P}$ car P est orthogonale donc $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$).

Si $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et si $\mathrm{X} = \mathrm{P}.\mathrm{X}'$ (donc si $\mathrm{X}' = {}^t\mathrm{P}.\mathrm{X}$)

alors ${}^t\mathrm{X}.\mathrm{A}.\mathrm{X} = 1 \Leftrightarrow {}^t\mathrm{X}.\mathrm{P}.\mathrm{D}.{}^t\mathrm{P}.\mathrm{X} = 1 \Leftrightarrow {}^t({}^t\mathrm{P}.\mathrm{X}).\mathrm{D}.({}^t\mathrm{P}.\mathrm{X}) = 1 \Leftrightarrow {}^t\mathrm{X}'.\mathrm{D}.\mathrm{X}' = 1$.

Si on note $\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors, dans la base orthonormale B' de vecteurs propres de A correspondant à la matrice P, l'équation de γ s'écrit: $\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1}$

avec λ_1 et λ_2 qui sont les valeurs propres de la matrice A.

II.4) Rappel: X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ssi $\mathrm{X} \neq \mathrm{O}$ et $\mathrm{A}.\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$.

$\to$ Dans ce cas, $\|\mathrm{Q}.\mathrm{X}\|^2 = {}^t(\mathrm{Q}.\mathrm{X}).(\mathrm{Q}.\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}.{}^t\mathrm{Q}.\mathrm{Q}.\mathrm{X} = {}^t\mathrm{X}.(\mathrm{A}.\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}.(\lambda\mathrm{X}) = \lambda({}^t\mathrm{X}.\mathrm{X}) = \lambda\|\mathrm{X}\|^2$.
Donc $\boxed{\text{si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre } \lambda \text{ alors } \|\mathrm{Q}.\mathrm{X}\|^2 = \lambda\|\mathrm{X}\|^2}$.

$\to$ Comme $\mathrm{X} \neq \mathrm{O}$, $\|\mathrm{X}\| \neq 0$ donc $\lambda = \dfrac{\|\mathrm{Q}.\mathrm{X}\|^2}{\|\mathrm{X}\|^2} \geq 0$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de A sont donc toutes positives}}$.

II.5) $\to$ P est une matrice de changement de base donc P est inversible.
Par suite, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$ est aussi inversible de même que ${}^t\mathrm{Q}$.

$\boxed{\text{A est une matrice inversible comme produit de deux matrices inversibles}}$.

$\to$ A étant inversible, 0 n'appartient pas au spectre de A.
Par ailleurs, on vient de voir que les valeurs propres de A sont toutes positives.
On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de A sont strictement positives}}$.

II.6) On se place dans la base orthonormale B'.

L'équation de γ s'écrit $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1}}$ et $b = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_2}}$.

> $\to$ Si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors γ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1}}$.
>
> $\to$ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors γ est une ellipse
> dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres de A formant la base B'.

Partie III *Une construction géométrique de γ*

III.1) On rappelle que P est la matrice de passage de la base B_0 à la base B.
Par suite, P^{-1} est la matrice de passage de la base B à la base B_0.

Par ailleurs, P est aussi la matrice de l'endomorphisme f dans la base B_0.

Si $\overrightarrow{m}$ a pour coordonnées (x, y) dans la base B_0

alors les coordonnées de $f(\overrightarrow{m})$ dans la base B_0 sont $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et les coordonnées de ce même vecteur dans la base B sont $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P^{-1}.P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{(x, y) = (u', v')}$.

III.2) Soit $\overrightarrow{m}'$ de coordonnées (x, y) dans la base B_0, $\overrightarrow{m}' \in C \iff x^2 + y^2 = 1$.

Si $\overrightarrow{m} = f(\overrightarrow{m}')$ alors les coordonnées de $\overrightarrow{m}$ sont encore (x, y) mais dans la base B
et la relation $x^2 + y^2 = 1$ signifie que $\overrightarrow{m} \in \gamma$.

Comme P est une matrice de passage, P est inversible et f est un automorphisme.

Par suite: $\overrightarrow{m}' \in C \iff f(\overrightarrow{m}') \in \gamma$ ce qui donne bien $\boxed{\gamma = f(C)}$.

III.3) Dans B_0, la droite D d'équation $x = 1$ est tangente en $\vec{i}$ au cercle de centre O et de rayon 1.
De plus $D = (I, \vec{j})$ donc $f(D) = (f(I), f(\vec{j})) = (U, \vec{J})$ est la droite d'équation $u = 1$ dans la base B.

Comme f est un automorphisme, le théorème donné permet de dire:

$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } u = 1 \text{ est tangente à } \gamma \text{ au point } \vec{I} \text{ de coordonnées } (1, 0) \text{ dans } B}$.

On montre de même que

- la droite Δ_1 d'équation $u = -1$ est tangente à γ au point $-\vec{I}$ de coordonnées $(-1, 0)$ dans B,
- la droite Δ_2 d'équation $v = 1$ est tangente à γ au point $\vec{J}$ de coordonnées $(0, 1)$ dans B,
- la droite Δ_3 d'équation $v = -1$ est tangente à γ au point $-\vec{J}$ de coordonnées $(0, -1)$ dans B.

III.4) On travaille dans la base orthonormale B_0.

→ $\overrightarrow{AB}_\lambda(-\lambda, 1)$ est un vecteur directeur de $D_{1,\lambda}$ et $\overrightarrow{CD}_\lambda(1, \lambda)$ est un vecteur directeur de $D_{2,\lambda}$.
Comme $\overrightarrow{AB}_\lambda.\overrightarrow{CD}_\lambda = -\lambda + \lambda = 0$ alors $\boxed{D_{1,\lambda} \text{ et } D_{2,\lambda} \text{ sont orthogonales}}$.

→ $M(x, y) \in D_{1,\lambda} \iff \begin{vmatrix} x-1 & -\lambda \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{x + \lambda y = 1}$.

$M(x, y) \in D_{2,\lambda} \iff \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y & \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{\lambda x - y = -\lambda}$.

Le point d'intersection de $D_{1,\lambda}$ et de $D_{2,\lambda}$ est le point $\boxed{m_\lambda\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)}$.

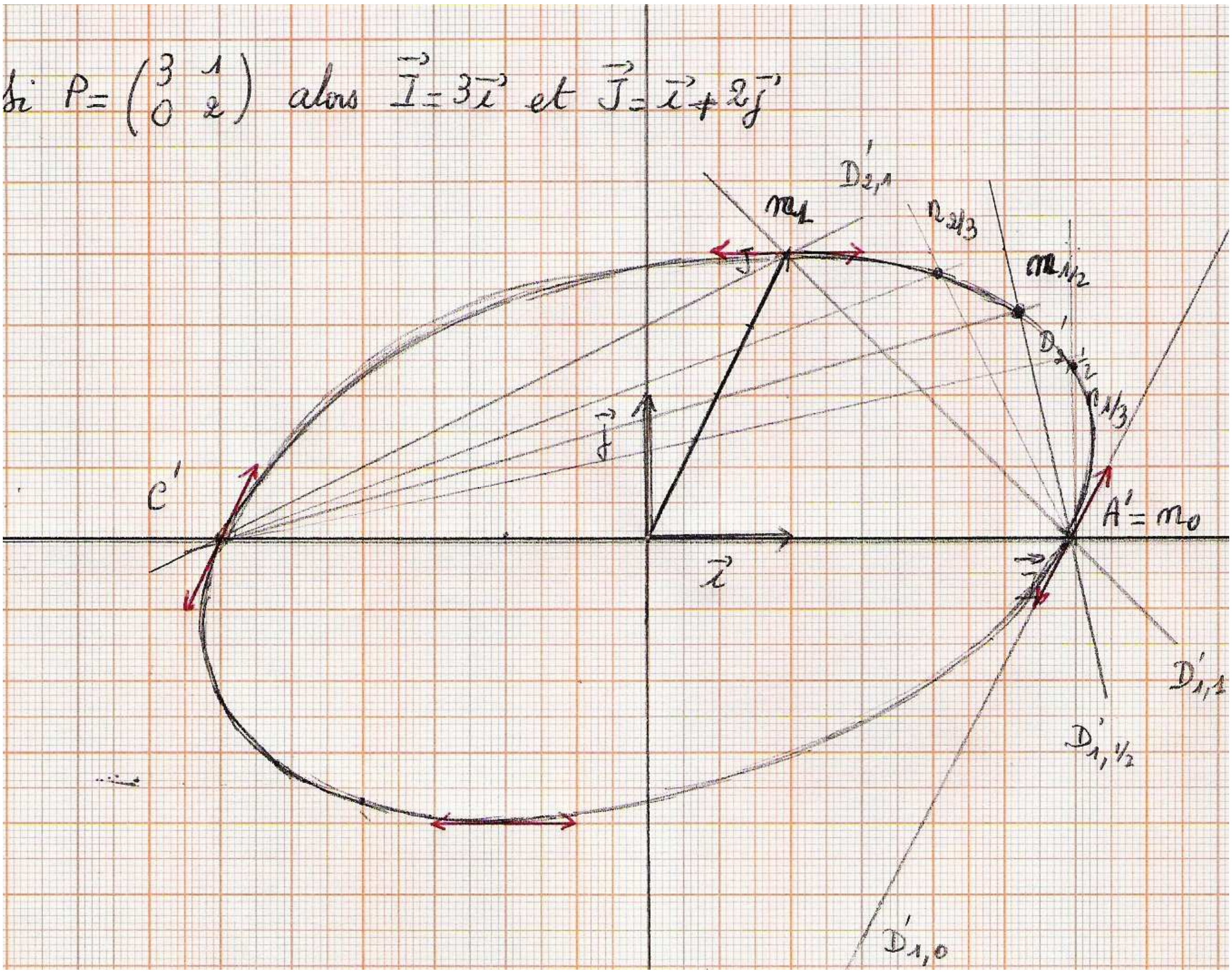
$$\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 = \frac{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} = \frac{1 + 2\lambda^2 + \lambda^4}{(1+\lambda^2)^2} = \frac{(1+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2} = 1$$

Donc $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ m_\lambda = D_{1,\lambda} \cap D_{2,\lambda} \in C}$.

Pour obtenir $n_\lambda = f(m_\lambda)$,

- on place les points A'(1, 0), $B'_\lambda(1-\lambda, 1)$, C'(– 1, 0) et $D'_\lambda 0, \lambda)$ dans la base B,
- on trace les droites $(A'B'_\lambda) = f(D_{1,\lambda})$ et $(C'D'_\lambda) = f(D_{2,\lambda})$.
- n_λ est à l'intersection de ces deux droites.

III.5)



III.6) → Si K est le parallèlogramme ABCD alors $A(K) = |\det(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})|$

Par suite, $A[f(K)] = |\det(f(\overrightarrow{AB}).f(\overrightarrow{AD})| = |\det(f).\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$
(formule de changement de base pour le déterminant d'une famille de vecteurs).
Par suite: $\boxed{A[f(K)] = |\det(f)| \times A(K)}$.

→ $A(C) = \pi$ donc $\boxed{A(\gamma) = |\det(P)|.\pi}$.