SESSION 2009 **TSIM102**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Exercice

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n(r) = r^n \cos(n\theta)$.

   (b) Calculer la somme de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.

2. On pose $f(r,\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$.

   (a) Justifier l'existence de $f(r,\theta)$ pour $r \in]0;1[$ et tout θ réel.

   (b) Déduire de la question précédente l'égalité :

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) \ .$$

Problème

Première partie

1. Résoudre, sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = 0$.

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer, sur l'intervalle $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, la solution générale de l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = (\sin(2t))^{3/2}$.

Deuxième partie

a désigne un nombre réel strictement positif, k un nombre réel.
Si M et N sont deux points du plan, on note $d(M, N)$ la distance euclidienne des points M et N.
$\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par A et B les points de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (C), formée de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y), tels que : $d(A, M)d(B, M) = k^2$.
   (b) Écrire cette équation en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$.
2. (a) En posant $R = r^2$, déterminer l'équation vérifiée par R.
   (b) Discuter l'existence et le signe des solutions réelles de cette équation en R. Préciser en particulier une condition portant sur a, k et θ pour que cette équation admette deux racines positives.
   Indication : il n'est pas utile de calculer explicitement les racines, on connaît leur somme et leur produit.
   (c) Montrer que, dans le cas où cette relation est satisfaite, la courbe (C) est la réunion de 4 courbes admettant une équation polaire de la forme $\theta \to r_i(\theta)$, r_i étant une fonction. Déterminer les fonctions r_i.
   (d) Déterminer les diverses symétries de la courbe (C) et en déduire un intervalle d'étude qui permet d'obtenir toute la courbe par des opérations géométriques que l'on précisera. Le tracé n'est pas demandé.
3. (a) Vérifier que dans le cas particulier où $k = \pm a$, une équation polaire de la courbe (C) est : $r(\theta) = \pm a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.
   Étudier les diverses symétries de la courbe.
   (b) Donner une allure de la courbe (C) dans le cas particulier où $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Troisième partie

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
θ appartenant à $[0; 2\pi[$, on désigne par $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$, ou simplement $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta) &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{aligned}$$

Soit un point M de $\mathbb{R}^3$, on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (r, θ) les coordonnées polaires du point m.
On appelle coordonnées cylindriques du point M le triplet (r, θ, z) et repère cylindrique le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

1. (a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) d'un point M en fonction de ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).
   (b) On suppose que $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exprimer X, Y, Z en fonction de x, y, z et θ.
   (c) Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ puis les vecteurs $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(d) Que peut-on dire du repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$?

On désigne par (Σ) la surface d'équation cartésienne : $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. (a) Déterminer une équation de la surface (Σ) en coordonnées cylindriques. En déduire une nappe paramétrée, $(r, \theta) \to M(r, \theta)$, dont l'image est la surface (Σ).

   Pour toute la suite du problème, on identifie la nappe paramétrée et la surface.

   (b) Montrer que la surface est contenue dans la partie de $\mathbb{R}^3$ comprise entre deux plans parallèles dont on donnera une équation.

   (c) Montrer que la surface (Σ) est une réunion de droites parallèles au plan d'équation $z = 0$.

3. (a) Montrer qu'un vecteur normal $\vec{N}(r, \theta)$ à la nappe paramétrée $(r, \theta) \to M(r, \theta)$, $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0; 2\pi[$, est égal à : $r\vec{k} + 2\sin(2\theta)\vec{v}(\theta)$.

   (b) En déduire une équation, dans le repère cylindrique, du plan tangent Π_M à (Σ) au point M de coordonnées cylindriques $(r, \theta, \cos(2\theta))$.

   (c) Retrouver l'équation de Π_M en utilisant uniquement les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r}(r, \theta)$.

   (d) Montrer que l'intersection de (Σ) et de Π_M contient la droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindriques $(0, 0, \cos(2\theta))$

4. Déterminer une équation du plan tangent à (Σ) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quatrième partie

On dit qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$, définie par un arc paramétré $t \to M(t)$, défini d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, est tracée sur la surface (Σ) si et seulement si le point $M(t)$ appartient à (Σ), pour tout t appartenant à I.

1. (a) L'arc paramétré Γ est défini en coordonnées cylindriques par une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, $t \to (r(t), \theta(t), z(t))$.

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne à la surface (Σ).

   On désigne par (Γ) la courbe formée par l'ensemble des images de l'arc paramétré Γ.

   (b) On suppose que l'arc paramétré $t \to M(t)$ est de classe C^1 au moins (ce qui signifie que les fonctions $t \to r(t)$, $t \to \theta(t)$ et $t \to z(t)$ sont de classe C^1) et que la courbe (Γ) est tracée sur la surface (Σ). Soit M un point régulier de la courbe. Démontrer que la tangente en M à la courbe (Γ) est contenue dans le plan tangent en M à la surface (Σ).

   (c) Retrouver le résultat de la question 3.(d) de la troisième partie à l'aide de la question précédente.

2. On suppose, jusqu'à la fin du problème, que (Γ) est définie par un arc paramétré de classe C^2 au moins.

   On suppose de plus que la courbe est définie par une fonction $\theta \to r(\theta)$, c'est-à-dire, dans le repère cylindrique, par l'arc paramétré : $\theta \to M(r(\theta), \theta, \cos(2\theta))$. Cette courbe est donc tracée sur la surface (Σ).

   Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$ dans le repère cylindrique, puis des vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2 M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$.

3. En tout point $M(\theta)$ de l'arc paramétré Γ tel que les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$ soient linéairement indépendants, on appelle plan osculateur à la courbe (Γ) en ce point, le plan affine : $\left(M(\theta), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)\right)$, qui sera noté P_M.

   On appelle ligne asymptotique de la surface (Σ) une courbe tracée sur (Σ) telle qu'en tout point M de la courbe, le plan tangent Π_M à la surface coïncide avec le plan osculateur P_M à la courbe.

   (a) À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur les vecteurs $\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta)$, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$, la courbe (Γ) est-elle une ligne asymptotique de (Σ) ?

   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ), sous forme d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fontion r.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) portant sur les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\theta}(r(\theta),\theta)$. Retrouver alors l'équation différentielle précédente.

4. Déterminer les projections sur le plan horizontal des lignes asymptotiques de (Σ).

Fin de l'énoncé