Les calculatrices sont interdites

****

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

****

Exercice

On pose $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,\mathrm{d}x$, où a et b sont réels.

1. Énoncer le ou les critères de convergence qui vous semblent adaptés à l'étude de cette intégrale.

2. Déterminer l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels l'intégrale $I(a,b)$ converge.

3. Représenter graphiquement ce domaine de convergence dans le plan (a,b).

Problème

Toutes les parties de ce sujet sont indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

1.1 Justifier la possibilité de restreindre l'étude de f à $\mathbb{R}^+$.

1.2 Que peut-on en déduire pour (C) ?

2. On note I_n l'intervalle $[n\pi\,;\,(n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Etudier, en fonction de la parité de n, les variations de f sur I_n.

3.1 Montrer que les points de (C) d'abscisse x tels que $f'(x)=0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.

3.2 Construire la courbe (C) pour $x \in [-2\pi\,;\,2\pi]$ (échelle : π = 2 carreaux sur les axes).

4.1 Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans tout intervalle I_n une solution unique.
On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

4.2 Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad x_n < (2n+1)\,\dfrac{\pi}{2}$.

4.3 Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

4.4 Montrer que $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$.

4.5 En déduire que $x_n = (2n+1)\,\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \varepsilon_n$, où ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini

(on rappelle que pour $x > 0$, $\arctan(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et que $\arctan(u)$ est équivalent à u au voisinage de 0).

Partie II

Soit g une fonction réelle de variable réelle, de classe C^1 par morceaux, de période T.

On note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation de g, et Δ un intervalle de longueur T.

Pour n entier naturel, on note a_n et b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de g, donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_\Delta g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_\Delta g(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_\Delta g(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ \text{ pour } n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, on appelle harmonique de rang n la quantité $h_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$.

On pose $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, qu'on appelle amplitude de h_n.

1. Montrer que si r_n est non nul, il existe φ_n tel que $h_n(t) = r_n\cos(n\omega t - \varphi_n)$.
On appelle φ_n phase de h_n (par convention, on choisit $\varphi_n \in \left]-\pi\,;\pi\right]$; si r_n est nul, φ_n n'existe pas).

2. On choisit dans cette question la fonction g de période T, définie par :

$$g(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [\,0\,;\,\dfrac{T}{2}\,[, \\[2ex] 0 \text{ si } t \in [\,\dfrac{T}{2}\,;\,T\,[. \end{cases}$$

2.1 Que peut-on dire de $g - \dfrac{1}{2}$?

2.2 Que peut-on en déduire pour les coefficients de Fourier de g ?

2.3 Écrire le développement en série de Fourier de g.

2.4 Quelle est la somme de cette série ? (on énoncera de façon précise le théorème utilisé)

2.5 Exprimer r_n et φ_n si elle existe.

3. On considère la série numérique de terme général $u_p = \dfrac{(-1)^p}{2p+1}$ pour $p \geq 0$.

3.1 Montrer que cette série est convergente.

3.2 Déduire de la question **2.** la somme $\sum_{p\geq 0} u_p$.

4. On conserve les notations des questions **2.** et **3.** ci-dessus.

4.1 Énoncer la formule de Parseval.

4.2 Calculer $\sum_{p\geq 0} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

4.3 En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$.

Partie III

On note Δ l'opérateur laplacien : soit W un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et f élément de C^2 (W,$\mathbb{R}$),

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et on s'intéresse à une fonction f telle que $f(x, y, z) = u(r)$.

Montrer que pour $r \neq 0$, on a : $\Delta f = u''(r) + \dfrac{2}{r} u'(r)$.

On considère dans les mêmes conditions, l'équation : $\Delta f = -\omega^2 f$, où ω est un réel strictement positif, c'est-à-dire l'équation (U) : $u''(r) + \dfrac{2}{r} u'(r) = -\omega^2 u(r)$.

2. On définit la fonction v par $v(r) = r\, u(r)$.

Montrer que v vérifie l'équation différentielle (V) : $v'' + \omega^2 v = 0$.

3. Résoudre l'équation (V), en déduire pour $r \neq 0$ les solutions réelles de (U).

4. Déterminer les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand r tend vers 0.

5. On ne conserve pour la suite que les solutions obtenues à la question 4 ci-dessus.
On impose de plus $u'(1) = 0$. Déterminer l'équation (Ω) que doit vérifier ω pour que cette condition supplémentaire soit satisfaite.

6. Montrer graphiquement que l'équation (Ω) admet une solution et une seule dans tout intervalle $\left]\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right[$ où n est un entier naturel.
On notera ω_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

7. Si n et p sont deux entiers naturels distincts, on note u_n et u_p deux solutions de (U) associées respectivement aux valeurs ω_n et ω_p solutions de (Ω).
Montrer que :

$$\int_0^1 u_n(r)\ u_p(r)\ r^2\,\mathrm{d}r = 0\,.$$

Fin de l'énoncé.