C.C.P Maths 2 TSI 2008

Exercice $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,\mathrm{d}x$ **avec** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1-) La fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale peut être doublement impropre en 0^+ et en $+\infty$.

Comme cette fonction est positive, les critères de convergences adaptés à l'étude de cette intégrale sont:
- la comparaison avec les intégrales de référence,
- la règle des équivalents,
- la règle de Riemann (qui permet de se ramener au premier point).

2-) $\rightarrow$ Si $b > 0$ alors $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-a}}$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{b-a+1}}$.

La convergence de $I(a,b)$ exige $\begin{cases} 1-a<1 \\ b-a+1>1 \end{cases}$ soit $0 < a < b$.

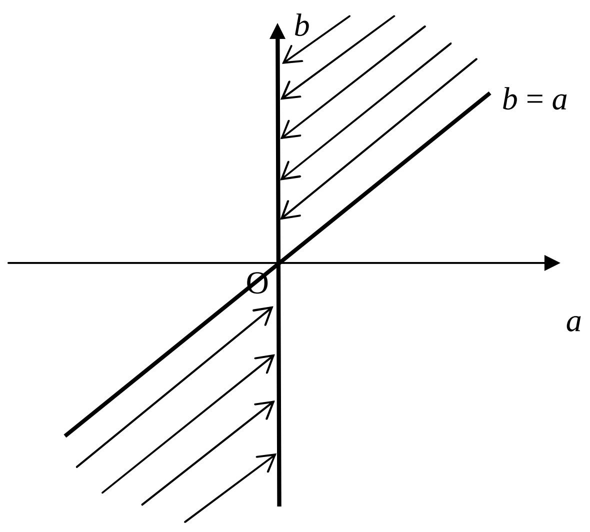
$\rightarrow$ Si $b = 0$ alors $I(a,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-a}}$ diverge (référence).

$\rightarrow$ Si $b < 0$ alors $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{b-a+1}}$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-a}}$.

La convergence de $I(a,b)$ exige $\begin{cases} b-a+1<1 \\ 1-a>1 \end{cases}$ soit $b < a < 0$.

Par suite: $\boxed{I(a,b) \text{ converge si et seulement si } 0 < a < b \text{ ou } b < a < 0}$.

3-) On obtient le domaine hachuré (frontières exclues).



$\boxed{\textbf{Problème}}$

I-) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x.\cos(x) - \sin(x)$

I-1.1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x.\cos(-x) - \sin(-x) = -x.\cos(x) + \sin(x) = -f(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$ et on peut restreindre son étude à $\mathbb{R}_+$.

I-1.2) $\boxed{\text{La courbe } (\mathscr{C}) \text{ est symétrique par rapport à l'origine du repère}}$.

I-2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) - x.\sin(x) - \cos(x) = -x.\sin(x)$

donc, sur I_n, $f'(x)$ a le signe de $-\sin(x)$ car $x \in I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ avec $n \in \mathbb{N}$ donc $x \geq 0$.

→ Si n est pair alors $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur I_n.

→ Si n est impair alors $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur I_n.

I-3.1) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La dérivée de f s'annule donc au point d'abscisse $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

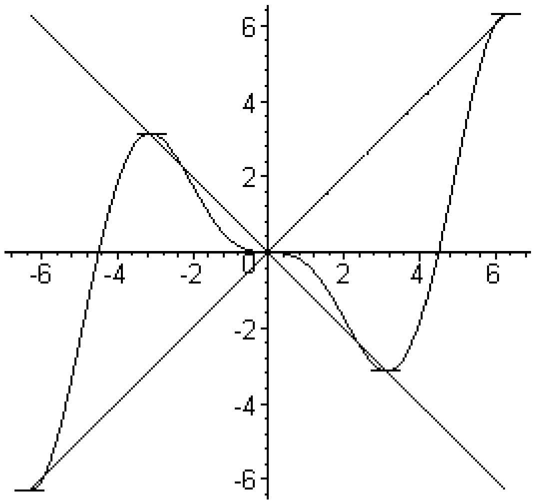
En un tel point, $f(k\pi) = k\pi.\cos(k\pi) - \sin(k\pi) = (-1)^k.k\pi$.

→ Si k est pair, on obtient le point de coordonnées $(k\pi, k\pi)$ situé sur la droite d'équation $y = x$.

→ Si k est impair, on obtient le point de coordonnées $(k\pi, -k\pi)$ situé sur la droite $y = -x$.

Donc $\boxed{\text{les points de } (\mathscr{C}) \text{ à tangente horizontale sont situés sur les bissectrices du repère}}$.

I-3.2)



I-4.1) → $\forall n \in \mathbb{N}$, f est continue sur $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$.

De plus: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n\pi) = n\pi.\cos(n\pi) - \sin(n\pi) = (-1)^n.n\pi$.

Par suite: $f(n\pi) \times f[(n+1)\pi] = (-1)^{2n+1}.n.(n+1).\pi^2 = -n.(n+1).\pi^2 \leq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet au moins une racine dans I_n.

→ On a vu que f' est de signe constant sur I_n et ne s'annule qu'aux bornes de I_n.

Par suite, f est strictement monotone sur I_n.

On en déduit que la restriction de f à I_n est donc injective.

En conclusion, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique } x_n \text{ dans chacun des intervalles } I_n}$.

I-4.2) On note que: $(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} \in \mathrm{I}_n$.

Par ailleurs, $f\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \times \cos\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

donc $f(n\pi) \times f\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^n . n\pi \times (-1)^{n+1} = -n\pi \leq 0$.

Par suite: $\boxed{\text{pour tout naturel } n\text{, la racine } x_n \text{ est contenue dans l'intervalle } \left[n\pi, (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right[}$.

L'intervalle est ouvert à droite car $f\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \neq 0$.

I-4.3) On vient de montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\pi \leq x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

On en déduit que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 \leq \dfrac{x_n}{n\pi} < 1 + \dfrac{1}{2n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{2n} = 1$, par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$. Donc $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi}$.

I-4.4) Par définition de x_n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n.\cos(x_n) = \sin(x_n)$ et $x_n \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(x_n) \neq 0$.

Par suite: $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = \tan(x_n)$ et on sait que: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \tan[\mathrm{Arctan}(x)] = x$.

La relation précédente s'écrit donc: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tan[\mathrm{Arctan}(x_n)] = \tan(x_n)$.

On en déduit: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Arctan}(x_n) = x_n + k\pi$.

Comme $\quad x_n \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{Arctan}(x_n) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$k = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Arctan}(x_n) - x_n] \in \left]-n+1, -n+\frac{1}{2}\right[.$$

Le seul entier de cet intervalle est $-n$ donc $k = -n$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathrm{Arctan}(x_n) = x_n - n\pi$.

On a montré que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}(x_n)}$.

I-4.5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n > 0$ donc $\mathrm{Arctan}(x_n) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \geq n\pi$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Par suite, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\pi}$ donc $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{n\pi} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$.

Finalement: $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$

ce qui s'écrit: $\boxed{x_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \varepsilon_n \text{ avec } \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0}$.

II-1) Si $r_n \neq 0$ alors $h_n(t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\omega t) + \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(n\omega t)\right]$.

Le point de coordonnées $\left(\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\right)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Si on note φ_n son angle polaire dans $]-\pi, \pi]$ alors $\cos(\varphi_n) = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

et $h_n(t) = r_n.[\cos(\varphi_n).\cos(n\omega t) + \sin(\varphi_n).\sin(n\omega t)]$

Donc $\boxed{\text{si } r_n \neq 0 \text{ alors } h_n(t) = r_n.\cos(n\omega t - \varphi_n)}$.

II-2.1) Si g est T-périodique avec $g(t) = 1$ sur $[0, T/2[$ et $g(t) = 0$ sur $[T/2, T[$

alors g est aussi T-périodique avec $g(t) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0, T/2[$ et $g(t) = -\dfrac{1}{2}$ sur $[T/2, T[$.

$\boxed{\text{La } \textit{restriction} \text{ de } g - \frac{1}{2} \text{ à } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \text{ est donc une fonction impaire}}$.

II-2.2) Si on note A_n et B_n les coefficients de Fourier de la fonction $g - \dfrac{1}{2}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = 0$.

On en déduit que:

$\rightarrow$ $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(g(t) - \dfrac{1}{2}\right)dt = a_0 - \dfrac{1}{2} = 0$ d'où $\boxed{a_0 = \dfrac{1}{2}}$.

$\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \left(g(t) - \dfrac{1}{2}\right)\cos(n\omega t)dt = a_n - 0 = 0$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0}$.

II-2.3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} \sin(n\omega t).dt = \dfrac{2}{T}\left[-\dfrac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} = \dfrac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$

donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_{2p} = 0}$ et $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p+1} = \dfrac{2}{(2p + 1)\pi}}$.

On en déduit le développement en série de Fourier de g: $\boxed{S(g)(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1}}$.

II-2.4) La fonction est T-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
donc sa série de Fourier converge en tout point vers sa fonction régularisée.
(Théorème de Dirichlet).

Si $t \notin \dfrac{T}{2}\mathbb{Z}$ alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1} = g(t)$ sinon $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1} = \dfrac{1}{2}$

Plus précisément, pour tout entier relatif k,

Si $t \in]kT, (2k + 1).T/2[$ alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1} = 1$

Si $t \in](2k + 1).T/2, (k + 1).T[$ alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1} = 0$

Si $t = k.T/2$ alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p \geq 0} \dfrac{\sin[(2p + 1)\omega t]}{2p + 1} = \dfrac{1}{2}$

II-2.5) Si n est un nombre pair non nul alors $h_n(t) = 0$.

Si $n = 2p + 1$ avec $p\in \mathbb{N}$ alors $h_{(2p+1)}(t) = \dfrac{2.\sin[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)\pi} = \dfrac{1}{2p+1}\cos\left[(2p+1)\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d'où $\boxed{\forall p\in \mathbb{N},\quad r_{2p+1} = \dfrac{2}{(2p+1)\pi} \quad \text{et} \quad \varphi_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}}$.

II-3.1) Si $u_p = \dfrac{(-1)^p}{2p+1}$ alors $\sum u_p$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^p}{2p+1} \text{ converge}}$.

II-3.2) On utilise la convergence de la série de Fourier de g pour $t = \dfrac{\mathrm{T}}{4}$.

Il vient: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\dfrac{\sin[(2p+1).\pi/2]}{2p+1} = 1$ soit $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{2p+1} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{2p+1} = \dfrac{\pi}{4}}$.

II-4.1) Si la fonction g est T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval dit que: la série $|a_0|^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k\geq 1}(\,|a_k|^2 + |b_k|^2\,)$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} |g(t)|^2.\mathrm{d}t$.

Comme g est à valeurs réelles, cette formule s'écrit: $\boxed{a_0^{\,2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\,a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\,) = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} g(t)^2.\mathrm{d}t}$.

II-4.2) Comme $\dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} g(t)^2.\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}/2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$

Appliquée à la fonction g, la formule de Parseval donne:

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{p\geq 0}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$.

II-4.3) La convergences séries $\sum\dfrac{1}{(2n)^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ est claire et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$.

On remarque que: $\forall n\in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\dfrac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$

Par passage à la limite dans cette égalité, il vient, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(2n)^2}$

d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

III-1) Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ alors $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r}$

Dès lors, comme $f(x, y, z) = u(r)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u'(r) \times \dfrac{\partial r}{\partial x} = u'(r) \times \dfrac{x}{r}$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u''(r) \times \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + u'(r) \times \dfrac{r - x \times \dfrac{x}{r}}{r^2}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u''(r) \times \dfrac{x^2}{r^2} + u'(r) \times \dfrac{r^2 - x^2}{r^3}$.

On montre de même que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = u''(r) \times \dfrac{y^2}{r^2} + u'(r) \times \dfrac{r^2 - y^2}{r^3}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = u''(r) \times \dfrac{z^2}{r^2} + u'(r) \times \dfrac{r^2 - z^2}{r^3}$.

Par suite: $\Delta f = u''(r) \times \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + u'(r) \times \dfrac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3}$.

En tenant compte de la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, il vient $\boxed{\forall r > 0,\quad \Delta f = u''(r) + \dfrac{2}{r} \times u'(r)}$.

III-2) L'énoncé me semble ambigu.
Il aurait peut-être fallu écrire "Soit u une solution de (U). On définit la fonction v par ..."

Soit u une solution de l'équation (U): $u''(r) + \dfrac{2}{r} u'(r) + \omega^2.u(r) = 0$,

si $v(r) = r.u(r)$ alors $v'(r) = u(r) + r.u'(r)$ et $v''(r) = 2.u'(r) + r.u''(r)$.

Par suite: $\forall r > 0,\quad v''(r) + \omega^2.v(r) = r\left[u''(r) + \dfrac{2}{r} u'(r) + \omega^2.u(r)\right] = 0$.

Donc $\boxed{v \text{ vérifie l'équation différentielle (V): } v'' + \omega^2.v = 0}$.

III-3) (V) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
Elle a pour solution générale $\boxed{v(r) = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r),\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

Si u est une solution de (U) alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\quad r.u(r) = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)$

donc $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall r > 0,\quad u(r) = \dfrac{\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)}{r}$.

Réciproquement, si $u = \lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r) \times \dfrac{1}{r}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

alors $u' = [-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \dfrac{1}{r} - u \times \dfrac{1}{r}$

et $u'' = -\omega^2.[\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)] \times \dfrac{1}{r} - [-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \dfrac{1}{r^2} - u' \times \dfrac{1}{r} + u \times \dfrac{1}{r^2}$

$$\text{donc } \begin{cases} \dfrac{2}{r} u' = 2[-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \dfrac{1}{r^2} - 2u \times \dfrac{1}{r^2} \\ u'' = -\omega^2.u(r) - 2[-\lambda\omega.\sin(\omega.r) + \mu\omega.\cos(\omega.r)] \times \dfrac{1}{r^2} + 2u \times \dfrac{1}{r^2} \end{cases}$$

Par suite $u'' + \dfrac{2}{r} \times u' = -\omega^2 \times u$ donc u est bien solution de (U).

$$\boxed{\text{Les solutions réelles de (U) sont les fonctions } u : r \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{\lambda.\cos(\omega.r) + \mu.\sin(\omega.r)}{r},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

III-4) $\lambda.\cos(\omega r) + \mu.\sin(\omega r) = \lambda + \mu.\omega r + \underset{0}{o}(r)$ donc $u(r) = \dfrac{\lambda}{r} + \mu\omega + \underset{0}{o}(1)$.

Pour que u admette une limite finie en 0, il faut et il suffit que λ soit nul.

$$\boxed{\text{Les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand } r \text{ tend vers 0 sont les fonctions } r\in\mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\mu.\sin(\omega.r)}{r},\ \mu\in\mathbb{R}^*.}$$

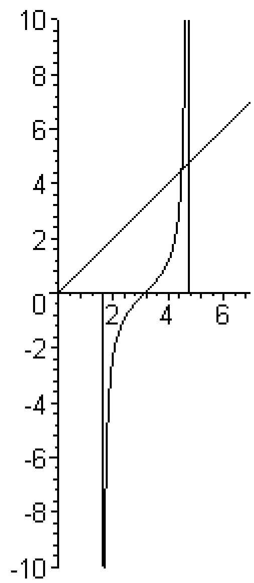
III-5) Si $u(r) = \dfrac{\mu.\sin(\omega.r)}{r}$ avec $\mu \neq 0$ alors $u'(r) = \mu.\dfrac{(\omega.r).\cos(\omega.r) - \sin(\omega.r)}{r^2}$.

La condition $u'(1) = 0$ se traduit par $\boxed{\omega.\cos(\omega) - \sin(\omega) = 0 \quad (\Omega)}$.

III-6) Sur $J_n = \left]\dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[$, $\quad (\Omega) \Leftrightarrow \omega = \tan(\omega)$

et la première bissectrice ne coupe la courbe de la restriction à J_n de la fonction tangente qu'en un point unique.

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (\Omega) \text{ admet une solution unique sur } J_n}$.



III-7) $I = \displaystyle\int_0^1 u_n(r).u_p(r).r^2.dr = k\int_0^1 \frac{\sin(\omega_n r).\sin(\omega_p r)}{r^2}\, r^2.dr = k\int_0^1 \sin(\omega_n\, r).\sin(\omega_p r).dr$

$I = \dfrac{k}{2}\displaystyle\int_0^1 \{\cos[(\omega_n - \omega_p)r] - \cos[(\omega_n + \omega_p)r].dr = \frac{k}{2}\left[\frac{\sin[(\omega_n - \omega_p)r]}{\omega_n - \omega_p} - \frac{\sin[(\omega_n + \omega_p)r]}{\omega_n + \omega_p}\right]_0^1$

$I = \dfrac{k}{2}\left[\dfrac{\sin(\omega_n - \omega_p)}{\omega_n - \omega_p} - \dfrac{\sin(\omega_n + \omega_p)}{\omega_n + \omega_p}\right] = \dfrac{k}{2(\omega_n^2 - \omega_p^2)} \times K$

avec $K = (\omega_n + \omega_p)[\sin(\omega_n).\cos(\omega_p) - \sin(\omega_p).\cos(\omega_n)]$
$\qquad - (\omega_n - \omega_p)[\sin(\omega_n).\cos(\omega_p) + \sin(\omega_p).\cos(\omega_n)]$.

En tenant compte de $\sin(\omega_n) = \omega_n.\cos(\omega_n)$ et de $\sin(\omega_p) = \omega_p.\cos(\omega_p)$

il vient $K = (\omega_n + \omega_p)(\omega_n - \omega_p).\cos(\omega_n).\cos(\omega_p) - (\omega_n - \omega_p)(\omega_n + \omega_p).\cos(\omega_n).\cos(\omega_p) = 0$.

Par suite, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 u_n(r).u_p(r).r^2.dr = 0}$.