

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **IV** utilise certains résultats des parties **I**, **II** et **III**.

Notations

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à 3 lignes à coefficients dans \mathbb{R} .

On appelle vecteur colonne de \mathbb{R}^3 toute matrice à 3 lignes et 1 colonne à coefficients dans \mathbb{R} .

On note tM la transposée de la matrice M .

Partie I

Un exemple numérique

Dans cette partie, on se propose d'étudier le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x - y & = & 3 \\ -x + 2y - z & = & -5 \\ -y + 2z & = & 5 \end{cases}$$

1. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne que l'on déterminera.
2. Calculer $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.*
La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer l'inverse A^{-1} de A . *On pourra utiliser la calculatrice.*
4. Montrer que le système (S) n'admet qu'une seule solution Q que l'on déterminera.
5. a. Montrer que le système (S) est équivalent au système $X = JX + K$ avec un vecteur colonne K de \mathbb{R}^3 que l'on déterminera et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- b. Justifier sans calcul qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $J = PD^tP$.
- c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de J . En déduire les matrices P et D .
- d. Pour tout entier naturel p , déterminer J^p en fonction de D et de la matrice P .

On définit la suite de vecteurs colonnes $(X^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ par $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On appelle $x^{(p)}$, $y^{(p)}$ et $z^{(p)}$ les composantes de $X^{(p)}$ c'est-à-dire $X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix}$. On pose enfin

$$\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q.$$

6. Calculer les vecteurs colonnes $X^{(1)}$ et $\Delta^{(1)}$.
7. Ecrire un programme dans le langage de Maple ou Mathematica qui calcule le vecteur colonne $X^{(2008)}$.
8. a. En utilisant le fait que Q vérifie $Q = JQ + K$, montrer que pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis que $\Delta^{(p)} = PD^p{}^tP\Delta^{(0)}$.
b. Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de \mathbb{R}^3 . On note $\|U\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sa norme euclidienne. Montrer que pour tout entier naturel p , $\|D^pU\| \leq \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|U\|$.
c. Exprimer $\|U\|$ en fonction de U et tU puis montrer que $\|PU\| = \|U\|$ et $\|{}^tPU\| = \|U\|$.
d. Déduire des questions précédentes que $\|\Delta^{(p)}\| \leq \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|\Delta^{(0)}\|$ puis que $\|\Delta^{(p)}\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}$.
9. Prouver alors les trois inégalités :

$$|x^{(p)} - 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |y^{(p)} - (-1)| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |z^{(p)} - 2| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

10. Quelles sont les limites respectives des suites $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$?
11. Déterminer une valeur de p à partir de laquelle le vecteur colonne $X^{(p)}$ est une valeur approchée de la solution exacte Q à 10^{-3} près, c'est-à-dire tel que $\|\Delta^{(p)}\| \leq 10^{-3}$.

Partie II

Un espace de matrices

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les matrices

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } U(b) = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble $E = \{J(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que E est stable par produit matriciel c'est-à-dire que pour toutes matrices M et N de E , le produit MN appartient à E .

On suppose désormais que $b \neq 0$.

3. Justifier sans calcul que les matrices $J(a, b)$ et $U(b)$ sont diagonalisables.
4. Quel est le rang de la matrice $U(b)$? En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(U(b))$.
5. Déterminer un réel λ tel que $U(b) = J(a, b) - \lambda I_3$.
6. En déduire une valeur propre de $J(a, b)$ et la dimension du sous-espace propre associé.
7. A l'aide de la trace, déterminer l'autre valeur propre de $J(a, b)$.

Partie III

Une norme matricielle

Si $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note pour tout indice i de $\{1, 2, 3\}$, $l_i = \sum_{j=1}^3 |m_{ij}|$.

Autrement dit, l_i est la somme des valeurs absolues des coefficients de la ligne i de la matrice M . Puis, on définit le réel positif $\varphi(M)$ par $\varphi(M) = \max\{l_1, l_2, l_3\}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de \mathbb{R}^3 alors on définit la norme infinie du vecteur X par $\|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

1. a. Justifier que si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\varphi(A) = 6$.
- b. Justifier que si $U = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\|U\|_\infty = 4$.
2. a. On note $X' = MX$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donner les expressions de x' , y' et z' en fonction de x , y , z et des coefficients de la matrice M .
- b. Montrer que $|x'| \leq (|m_{11}| + |m_{12}| + |m_{13}|)\|X\|_\infty$. Déterminer de même une inégalité pour $|y'|$ et pour $|z'|$.
- c. En déduire que $\|MX\|_\infty \leq \varphi(M)\|X\|_\infty$ puis que, si M' désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\|M'MX\|_\infty \leq \varphi(M')\varphi(M)\|X\|_\infty$.

Partie IV

La méthode de Jacobi

On considère le système linéaire

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = a \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = c \end{cases}$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose que le système (S) admet une unique solution notée $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. On suppose de plus que $a_{1,1} \neq 0$ et $a_{2,2} \neq 0$ et $a_{3,3} \neq 0$.

1. Montrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$(S_J) \begin{cases} x = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}z + \frac{a}{a_{1,1}} \\ y = -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}x - \frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}z + \frac{b}{a_{2,2}} \\ z = -\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}x - \frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}y + \frac{c}{a_{3,3}} \end{cases}$$

2. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S_J) peut se mettre sous la forme matricielle $X = JX + K$ avec J une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et K un vecteur colonne de \mathbb{R}^3 que l'on déterminera.

Pour un système linéaire comportant un grand nombre d'équations et d'inconnues, les méthodes de résolution directe (comme celle du pivot de Gauss) aboutissant à une solution exacte deviennent très gourmandes en temps de calcul. Il est alors plus judicieux de calculer une solution approchée à l'aide d'une suite définie par récurrence convergeant vers la solution exacte, comme cela se fait dans la méthode de Jacobi que nous allons nous contenter d'illustrer sur un système 3×3 .

On définit ainsi la suite de vecteurs $(X^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^3 par la donnée d'un vecteur initial $X^{(0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On définit aussi la suite $(\Delta^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ par $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$. Le vecteur $\Delta^{(p)}$ permet d'apprécier l'erreur d'approximation entre la solution approchée $X^{(p)}$ et la solution exacte Q .

3. En utilisant le fait que Q est la solution de l'équation $(S_J) : X = JX + K$, montrer que pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis $\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty \leq \varphi(J)\|\Delta^{(p)}\|_\infty$.
4. En déduire que pour tout entier naturel p , $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leq (\varphi(J))^p \|\Delta^{(0)}\|_\infty$.
5. En déduire une condition suffisante (C_1) sur la matrice J pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. On pose pour tout entier naturel $p : X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix}$ et $\Delta^{(p)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(p)} \\ \beta^{(p)} \\ \gamma^{(p)} \end{pmatrix}$.

- a. Montrer les trois inégalités :

$$|\alpha^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\beta^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\gamma^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty.$$

- b. Lorsque la condition (C_1) est vérifiée, montrer que les suites $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers q_1 , q_2 et q_3 .

7. La condition (C_1) est-elle vérifiée par la matrice J de la partie I ?

8. On revient au cas général. On suppose dans cette question que la matrice J est diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J = PDP^{-1}$.

On peut montrer alors, comme dans la partie I que, pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p)} = PD^p P^{-1} \Delta^{(0)}$.

- a. Montrer que $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leq \varphi(P)(\varphi(D))^p \varphi(P^{-1}) \|\Delta^{(0)}\|_\infty$.
 - b. En déduire une condition suffisante (C_2) sur $\varphi(D)$ pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - c. La condition (C_2) est-elle vérifiée par la matrice D de la partie I ?
9. Dans cette question, on reprend l'exemple de la matrice $J(a, b)$ avec $b \neq 0$ définie à la partie II. On a vu que cette matrice est diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J(a, b) = PDP^{-1}$.
 - a. Calculer $\varphi(J(a, b))$ et $\varphi(D)$.
 - b. La matrice $J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ vérifie-t-elle la condition (C_1) ? la condition (C_2) ?
 - c. Dessiner dans le plan l'ensemble des couples (a, b) de \mathbb{R}^2 qui vérifient la condition (C_1) et ceux qui vérifient la condition (C_2) .

Fin de l'énoncé