Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II, série TSI, concours CCP 2007

Problème 1

1. Il est clair que φ est bilinéaire et symétrique. Montrons que φ est définie positive.
   Soit $P \in E$. Tout d'abord $\varphi(P,P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$.
   Si $\varphi(P,P) = 0$, on a alors à la fois $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$. Comme $deg(P) \leq 2$, la formule de Taylor permet d'écrire $P = P(0) + XP'(0) + \dfrac{X^2}{2}P''(0) = 0$.
   D'où φ est définie positive et :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$$

2. $$\begin{aligned} \langle 1, X\rangle &= 1\times 0 + 0\times 1 + 0 \times 0 = 0 \\ \langle 1, X^2\rangle &= 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 2 = 0 \\ \langle X, X^2\rangle &= 0\times 0 + 1\times 0 + 0\times 2 = 0 \end{aligned}$$
   D'où :
   $\boxed{B_c \text{ est une base orthogonale de } (E, \langle\ ,\ \rangle)}$
   Notons $\|\ \|$ la norme associée à φ.
   $$\begin{aligned} \langle 1, 1\rangle &= 1\times 1 + 0\times 0 + 0\times 0 = 1 \Rightarrow \|1\| = 1 \\ \langle X, X\rangle &= 0\times 0 + 1\times 1 + 0\times 0 = 1 \Rightarrow \|X\| = 1 \\ \langle X^2, X^2\rangle &= 0\times 0 + 0\times 0 + 2\times 2 = 4 \Rightarrow \|X^2\| = 2 \end{aligned}$$
   D'où :
   $\boxed{\text{Une base orthonormée de } E \text{ est } \left(1, X, \dfrac{X^2}{2}\right)}$

3. $$\begin{aligned} \varphi(P,Q) &= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \\ &= aa' + bb' + 4cc' \end{aligned}$$
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 4c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + 4cc'.$$
   D'où :

$$\boxed{\varphi(P,Q) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}}$$

4. Soit Ω la matrice de passage de B_c à $B = (1, X, \dfrac{X^2}{2})$: $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$. Notons A' la matrice de u dans B ; on a alors $A' = \Omega^{-1}A\Omega$ et A' est la matrice de u dans une base orthonormée. D'où :
   a) $\Leftrightarrow u$ conserve le produit scalaire
   $\Leftrightarrow u$ est une isométrie vectorielle
   $\Leftrightarrow {}^tA'A' = I_3$
   $\Leftrightarrow {}^t\Omega{}^tA{}^t(\Omega^{-1})\Omega^{-1}A\Omega = I_3$
   $\Leftrightarrow {}^tA{}^t(\Omega^{-1})\Omega^{-1}A = {}^t(\Omega^{-1})\Omega^{-1}$
   Or ${}^t(\Omega^{-1})\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = S$

On a montré :

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle u(P), u(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle \Leftrightarrow\ {}^tASA = S}$$

5. Soit $A \in G$. On a alors $\det({}^tASA) = \det(S) \Rightarrow 4\det(A)^2 = 4$. D'où :
   $\det(A) = \pm 1 \neq 0$ et $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Montrons donc que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.
   - ${}^tI_3SI_3 = S \Rightarrow I_3 \in G : G \neq \emptyset$.
   - Soient $A,\ B \in G$.
   ${}^t(AB)S(AB) = {}^tB({}^tASA)B = {}^tBSB = S$; d'où $AB \in G$ et G est stable pour la multiplication des matrices.
   - Soit $A \in G$; $\quad {}^tASA = S \ \Rightarrow\ ({}^tA)^{-1}SA^{-1} = S$
   $$\begin{aligned} &\Rightarrow {}^t(A^{-1})SA^{-1} = S \\ &\Rightarrow A^{-1} \in G \end{aligned}$$
   D'où :
   $$\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } (GL_3(\mathbb{R}), \times)}$$

6. a) Soit $P \in E$; alors $deg(P(1-X)) = deg(P)$ et $v(P)$ est bien dans E.
   D'autre part, $\forall P,\ Q \in E,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$,
   $v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1-X) = \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) = \lambda v(P) + \mu v(Q)$. D'où :
   $$\boxed{v \text{ est un endomorphisme de } E}$$
   b) $v(1) = 1$
   $v(X) = 1 - X$
   $v(X^2) = 1 - 2X + X^2$
   D'où :
   $$\boxed{M_{B_c}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$
   c) Notons A la matrice précédente. On a alors :
   $$\begin{aligned} {}^tASA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &\neq S \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\boxed{v \text{ n'est pas une isométrie vectorielle pour le produit scalaire } \varphi}$$
   d) $\forall P \in E, v \circ v(P) = v(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P$; d'où :
   $$\boxed{v \text{ est involutif ; c'est un isomorphisme de } E \text{ et } v^{-1} = v.}$$

7. a) La dérivation des polynômes étant linéaire et diminuant le degré,
   $\underline{\psi \text{ et } \psi_1 \text{ sont clairement des endomorphismes de } E.}$

b) $\psi(1) = 1$.
$\psi(X) = 1 + X$
$\psi(X^2) = 2 + 2X + X^2$
$\psi_1(1) = 1$
$\psi_1(X) = -1 + X$
$\psi_1(X^2) = -2X + X^2$
D'où :

$$\boxed{M_{B_C}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{B_C}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $\forall P \in E,\ \psi \circ \psi_1(P) = \psi(P - P') = (P - P') + (P' - P'') + P''$ car $P^{(3)} = 0$. D'où $\psi \circ \psi_1(P) = P$ et :

$$\boxed{\psi \circ \psi_1 = Id_E}$$

L'on en déduit que $\det(\psi) \times \det(\psi_1) = 1$, que $\underline{\psi \text{ et } \psi_1 \text{ appartiennent à } GL(E)}$ et que $\boxed{\psi_1^{-1} = \psi}$

d) Soit P solution polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 de l'équation. On a alors :

$$\begin{aligned} \psi_1(P) = X^2 + 5X + 9 &\Leftrightarrow P = \psi(X^2 + 5X + 9) \\ &\Leftrightarrow P = (X^2 + 5X + 9) + (2X + 5) + 2 \\ &\Leftrightarrow P = X^2 + 7X + 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une solution particulière de l'équation différentielle est donc } \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 + 7x + 16 \end{array}}$$

$$\boxed{\text{La solution générale de l'équation différentielle est donc } \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 + 7x + 16 + \lambda e^x \end{array} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

8. a) Notons $C_1,\ C_2,\ C_3$ les colonnes de A. Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 3) = 0 \\ \langle C_1, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-1 + \sqrt{3} + 3 - 1 - 1 - \sqrt{3}) = 0 \\ \langle C_2, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(3 - 1 - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1) = 0 \\ \langle C_1, C_1 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}) = 1 \\ \langle C_2, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(4 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 2\sqrt{3}) = 1 \\ \langle C_3, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 1) = 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{A \text{ est une matrice orthogonale.}}$$

b) Soit $P = x + yX + z\dfrac{X^2}{2} \in E$. Résolvons $r(P) = P$.

$$\begin{aligned} r(P) = P &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + (1+\sqrt{3})y + (\sqrt{3}-1)z = 0 \\ (1-\sqrt{3})x - 2y - (1+\sqrt{3})z = 0 \\ -(1+\sqrt{3})x + (\sqrt{3}-1)y - 2z = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc :

$$r(P) = P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (1+\sqrt{3})y + (\sqrt{3}-1)z = 0 \\ y(-4-2) + z(-2-2\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})^2) = 0 \ (L_2 \leftarrow 2L_2 + (1-\sqrt{3})L_1) \\ y(-2\sqrt{3}+2+4+2\sqrt{3}) + z(4+2) = 0 \ (L_3 \leftarrow -2L_3 + (1+\sqrt{3})L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des vecteurs invariants est donc } \Delta = Vect\{1 + X - \frac{X^2}{2}\}}$$

c) L'ensemble des invariants étant une droite, <u>r est une rotation vectorielle.</u>
<u>Son axe est Δ, ensemble des invariants.</u>

Orientons Δ par $P_0 = 1 + X - \dfrac{X^2}{2}$ et notons θ l'angle de r.

- Tr $(A) = 2\cos(\theta) + 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0$
$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

- Afin de préciser l'angle, prenons un polynôme non colinéaire à P_0, 1 par exemple, et calculons le produit mixte $[1, r(1), P_0]$ qui est du signe de $\sin(\theta)$.

$$[1, r(1), P_0] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{3} > 0$$

D'où : $\sin(\theta) > 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$$\boxed{r \text{ est donc une rotation d'axe } \Delta \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ pour l'orientation choisie.}}$$

<u>Problème 2</u>

1. - (C) est définie sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \text{ on peut restreindre l'étude à } \mathbb{R}^+ \\ - (C) \text{ est symétrique par rapport à } (Ox) \end{array} \right.$

   (C) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x' = 2t$ et $y' = 3t^2$
   D'où le tableau de variations :

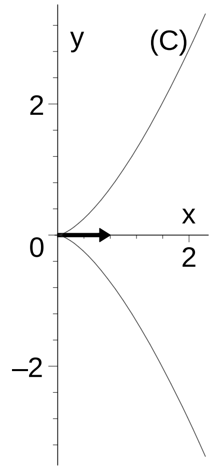
t	0		$+\infty$
x'	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	0	$+$	

   - Étude du point stationnaire en 0 :
   Au voisinage de $0, \overrightarrow{OM(t)} = t^2 i + t^3 j$. (i, j) étant libre, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce et la tangente est orientée par i.
   - Étude de la branche infinie en $+\infty$:
   $\dfrac{y}{x} = t$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$: d'où la branche infinie est une branche parabolique de direction asymptotique $Vect\{j\}$

   Tableau de valeurs approchées :

y	0	1	2.3	4
x	0	1	3.4	8

Représentation :



2. a) On reconnaît l'équation d'une parabole d'axe (Ox), de sommet $\Omega\left(\dfrac{4}{27}, 0\right)$, de paramètre $p = \dfrac{2}{27}$.

b)
$$\begin{aligned}\left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2\left(t^2 + \frac{4}{9}\right) &= \left(t^4 - \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{9^2}\right)\left(t^2 + \frac{4}{3^2}\right) .\\ &= t^6 + t^2\left(\frac{4}{9^2} - \frac{4}{9}\right) + \frac{16}{9^2 \times 3^2}\\ &= t^6 - \frac{12}{9^2}t^2 + \frac{16}{27^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ t^6 - \frac{4}{27}t^2 + \frac{16}{27^2} = \left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2\left(t^2 + \frac{4}{9}\right)}$$

c)
$$\begin{aligned}M(x,y) \in (C) \cap (\Gamma) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ y^2 = \dfrac{4}{27}\left(x - \dfrac{4}{27}\right) \end{cases} .\\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t^6 - \dfrac{4}{27}t^2 + \dfrac{16}{27^2} = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t^2 - \dfrac{2}{9}\right)^2\left(t^2 + \dfrac{4}{9}\right) = 0 \text{ (d'après la question 2)a))} \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{2}{9}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{(C) \cap (\Gamma) = \left\{ A\left(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{27}\right), B\left(\frac{2}{9}, \frac{-2\sqrt{2}}{27}\right) \right\}}$$

d) Notons T_C la tangente en A à (C) et T_Γ la tangente en A à (Γ).

La pente a_C de T_C est $\dfrac{y'}{x'}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Or $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{y'}{x'}(t) = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3t}{2}$. D'où :

$\underline{a_C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to 2p(x-2p) - y^2 \end{array}$. (Γ) a pour équation $f(x,y) = 0$.

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = 2pi - 2yj \neq \overrightarrow{0}$ (où $p = \dfrac{2}{27}$ est défini ci-dessus). D'où au point A de (Γ), la normale est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} f(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{27}) = 2p(i - \sqrt{2}j)$.

La tangente est orientée par un vecteur orthogonal à $2p(i-\sqrt{2}j)$: $\sqrt{2}i + j$ et a donc pour pente :

$\underline{a_\Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

T_C et T_Γ passent toutes deux par A et ont même pente, donc :

$$\boxed{\text{En } A,\ (C) \text{ et } (\Gamma) \text{ ont même tangente.}}$$

Cette tangente a pour équation : $y - \sqrt{2}p = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - 3p)$.

D'où :

$$\boxed{(T) \text{ coupe } (Ox) \text{ en } F \text{ de coordonnées } (p,0) = \left(\frac{2}{27}, 0\right)}$$

e) La normale (N) passe par $A\left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{2\sqrt{2}}{27}\right)$ et est dirigée par $i - \sqrt{2}j$ (d'après la question précédente. Elle a donc pour équation :

$y - \dfrac{2\sqrt{2}}{27} = -\sqrt{2}\left(x - \dfrac{2}{9}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}x + y - \dfrac{8\sqrt{2}}{27} = 0.$

Soit $M(x,y) \in P$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (C) \cap (N) \quad &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \sqrt{2}x + y - \dfrac{8\sqrt{2}}{27} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t^3 + \sqrt{2}t^2 - \dfrac{8\sqrt{2}}{27} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(t^2 + \dfrac{4\sqrt{2}}{3}t + \dfrac{8}{9}\right) = 0 \ ((N) \text{ passe par } A) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$M(x,y) \in (C)\cap(N) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(t + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou } t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

D'où :

$$M(x,y) \in (C)\cap(N) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{9} \text{ et } y = \dfrac{2\sqrt{2}}{27} \ (t = \dfrac{\sqrt{2}}{3}) \text{ ou} \\ x = \dfrac{8}{9} \text{ et } y = -\dfrac{16\sqrt{2}}{27} \ (t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}) \end{cases}.$$

Donc :

$$\boxed{(N)\cap(C) = \{A, D\} \text{ où } D \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{8}{9}, -\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)}$$

La tangente en D à (C) a pour pente $\dfrac{y'}{x'}\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\sqrt{2}$. C'est la même que celle de (N) qui passe aussi par D.
Donc :
(N) est tangente en D à (C).

f) Soit $M(x,y) \in P$.

$$M(x,y) \in (\Gamma)\cap(N) \Leftrightarrow \begin{cases} 2p(x-2p) - y^2 = 0 \\ \sqrt{2}x + y - 4p\sqrt{2} = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \dfrac{y^2}{2p} \\ \sqrt{2}\left(2p + \dfrac{y^2}{2p}\right) + y - 4p\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \dfrac{y^2}{2p} \\ y^2 + y\sqrt{2}p - 4p^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \dfrac{y^2}{2p} \\ \left(y - p\sqrt{2}\right)\left(y + 2\sqrt{2}p\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (3p, p\sqrt{2}) \text{ ou } (x,y) = (6p, -2p\sqrt{2})$$

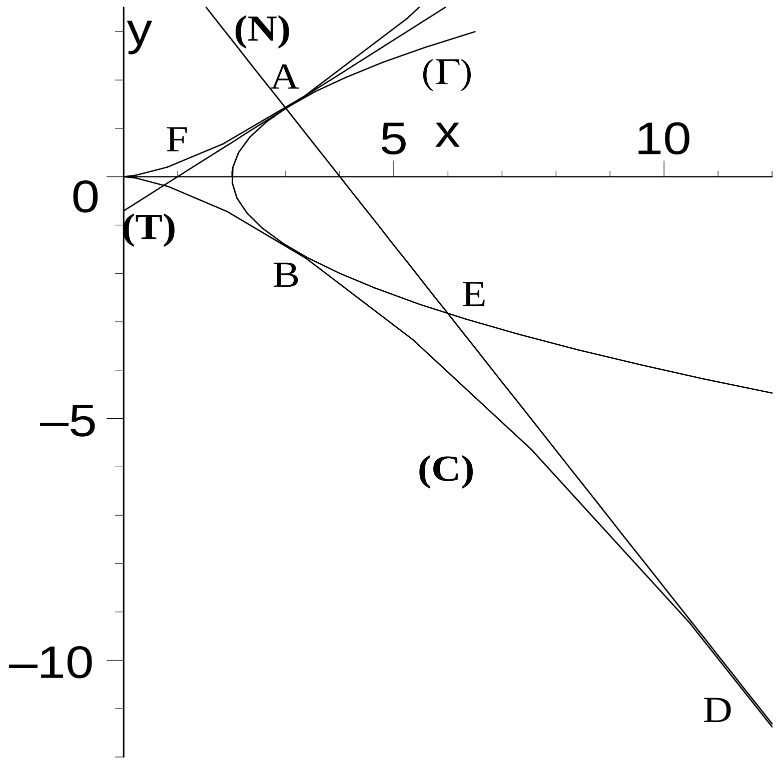
Donc :

$$\boxed{E \text{ a pour coordonnées } (6p, -2p\sqrt{2}) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)}$$

3. Remarquons que les valeurs approchées des coordonnées dans le repère donné des points remarquables sont données par le tableau :

A	B	D	E	F
3	3	12	6	1
1.4	-1.4	-11.3	-2.8	0

ce qui donne la représentation :



ΔΔΔ

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr