Les calculatrices sont autorisées

NB. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $C(\mathrm{I},K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans K où K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $C^k(\mathrm{I},K)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^k de I dans K où K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients réels.

Convention : On convient d'identifier les fonctions polynômes au polynômes qui leur correspond.

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1) On définit les fonctions φ et ψ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ et } \psi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

1.1) Étudier les variations des fonctions φ et ψ, préciser leurs limites en $+\infty$.
En déduire le signe de chacune des fonctions sur $[1, +\infty[$.

1.2) On considère un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, du plan.
Représenter graphiquement les fonctions φ et ψ dans ce repère.

2) On définit les suites $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln(n)\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln(n+1).$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.
On note γ leur limite commune, le réel γ est appelé constante d'Euler, qu'on ne cherchera pas à calculer.

3) Soit n un entier naturel, on définit la fonction f de]0, 1] dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1-(1-x)^n}{x}$$

3.1) Montrer que la fonction f est intégrable sur]0, 1].

3.2) Montrer que la fonction f est une fonction polynôme élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donner l'expression de f dans la base $\left(1, X, X^2, ..., X^{n-1}\right)$

3.3) Montrer que la famille $\left(1, X-1, (X-1)^2, ..., (X-1)^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donner l'expression de f dans cette base.

3.4) Calculer de deux façons différentes l'intégrale $I=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Pour n entier naturel et p entier compris entre 0 et n, on note : $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Déduire des deux expressions trouvées pour I que :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}.$$

Partie 2 : Transformée de Laplace

Soit E l'ensemble des fonctions f élément de $C(]0,+\infty[,\mathbb{C})$, telles que :

- Pour tout réel a strictement positif, f est intégrable sur l'intervalle]0, a].

- A chaque fonction f on peut associer $A\in\mathbb{R}_+^*$, $\beta\in\mathbb{R}_+^*$, et $n\in\mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x\in[A,+\infty[,\quad |f(x)|\leq\beta x^n.$$

4) Soit x et a deux réels strictement positifs, calculer $\int_x^a \ln(t)\,dt$.

Montrer que la fonction logarithme est élément de E.

5) Montrer que l'ensemble E est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel.

6) Soit x un réel strictement positif.
Montrer que, si f est élément de E, alors la fonction φ_x définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ par $\varphi_x(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t})e^{-xt}$, est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On définit alors et on note $\mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace d'un élément f de E par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt.$$

7) Montrer que l'application $\mathcal{L}$ définie sur E est une application linéaire.

8) Si f est élément de $C^1\left([0,+\infty[, \mathbb{C}\right)$ tel que f' soit élément de E, calculer $\mathcal{L}(f')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$ et de $f(0)$.

9) Soit k un entier naturel, montrer que f_k définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = t^k$, est élément de E.

Soit α un réel positif, on pose $I_k = \int_0^{\alpha} t^k\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k.
En déduire la transformée de Laplace de f_k.

10) Soit ω un réel et f_ω l'application définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ par $f_\omega(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$.

10.1) Montrer que f_ω est élément de E.

10.2) Calculer la transformée de Laplace de f_ω.

10.3) En déduire les transformées de Laplace des fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\cos_\omega(t) = \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \sin_\omega(t) = \sin(\omega t).$$

Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel

On définit la fonction de Bessel de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

11) Montrer que J est élément de $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, exprimer J' et J'' à l'aide d'une intégrale.

12) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad J'(t) = -\frac{t}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos(t\cos\,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

13) Montrer que l'application J est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : tJ'' + J' + tJ = 0.$$

14) Montrer que l'application J est élément de E défini dans la partie 2.

15) Soit x un réel strictement positif, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{x^2+\cos^2\theta}$.

15.1) Montrer que : $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{x^2+\cos^2\theta}$.

15.2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{x^2+\cos^2\theta}$. En déduire $I(x)$.

Indication : on peut faire le changement de variable $u = \tan\theta$.

16) On admet avoir le droit de permuter l'ordre d'intégration soit :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\cos(t\cos\theta)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta.$$

Calculer la transformée de Laplace de l'application J.

<u>Partie 4 : Transformée de Laplace de la fonction logarithme</u>

17) Montrer que la fonction g définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

18) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\qquad U_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,x & \text{si } x \in\,]0,n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

18.1) Montrer que :

$$\forall u \in\,]-1,+\infty[,\qquad \ln(1+u) \leq u.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \left|U_n(x)\right| \leq e^{-x}\left|\ln(x)\right|.$$

18.2) Pour x réel strictement positif fixé, déterminer la limite de la suite $\left(U_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} U_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

19) Soit n un entier naturel, on note $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t.$

19.1) Montrer l'existence de l'intégrale J_n.

19.2) Soit p un entier naturel et ε un élément de]0, 1[, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 u^p \ln(nu)\,\mathrm{d}u,$ en déduire la converge de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^p \ln(nu)\,\mathrm{d}u$ et calculer cette intégrale.

19.3) Soient n un entier naturel et p un entier compris entre 0 et n, montrer que :

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

19.4) Utiliser le résultat de la question 3.4.) pour exprimer J_n en fonction de u_n défini dans la partie 1 question 2.

20) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de la constante d'Euler.

21) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction logarithme est définie sur]0,+∞[et calculer sa transformée de Laplace.

.

Fin de l'énoncé