

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème

La partie I est indépendante de la suite du problème.

I) A) On considère l'équation différentielle $(E_1) : xy' - y = \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Résoudre l'équation homogène associée.

b) Déterminer une solution particulière de l'équation complète.

c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .

2) Préciser la solution f de l'équation (E_1) telle que $f(1) = 0$.

B) On considère l'équation différentielle $(E_2) : x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \rightarrow x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme : $y(x) = K(x)x^\alpha$, en donnant à α la valeur trouvée à la question précédente. On montrera que K' vérifie une équation différentielle du premier ordre.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2) a) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de l'équation (E_2) .

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .

3) Démontrer que la fonction f (définie à la question A) 2)) est l'unique solution de l'équation (E_2) telle que $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$.

II) Etude de la fonction f .

1) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

a) Etudier les variations de la fonction f .

b) Etudier les branches infinies de f et construire une allure de la représentation graphique.

c) Déduire de l'étude des variations de f que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f .

b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge et la calculer.

c) Quelle est la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?

III) Comparaison des moyennes.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant n nombres réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel m_a défini par : $m_a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique le nombre réel m_g défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique le nombre réel m_h défini par : $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

1) a) En appliquant l'inégalité montrée à la question II) 1) c) aux réels $\frac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.

b) Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?

c) Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a :

$$x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 - 4x^2 y^2 z^2 + 1 \geq 0.$$

2) a) En appliquant l'inégalité vue en III 1) a) aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leq m_g$.

b) Dans quels cas a-t-on $m_h = m_g$?

c) Dédire des questions précédentes que $m_h \leq m_a$.

En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, on a :

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

IV) Applications.

1) Dédire de l'inégalité $m_g \leq m_a$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\frac{n}{1 + \ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.

3) a) En déduire la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ est bornée et en donner un encadrement à l'aide des questions précédentes.

4) a) Démontrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$ est croissante (on pourra considérer la suite de terme général $\ln(\sqrt[n]{n!})$).

b) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$?

V) Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.

1) a) k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer un encadrement de $\ln(k)$ par deux intégrales de la fonction $\ln$.

b) En déduire : $\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt.$

c) En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

2) Déterminer la nature des séries de termes généraux : $\frac{1}{(n!)^{1/n}}$ et $\frac{1}{(n!)^{2/n}}$.

Fin de l'énoncé