I) Equations différentielles

A) $xy' - y = \ln(x)$

1) **a)** L'équation différentielle est linéaire, du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel le théorème s'applique, on connait donc l'existence de solutions et leur structure.

L'équation homogène associée est : $xy' - y = 0$, ses solutions sont : $y = K\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = Kx$.

b) On cherche ici une solution particulière, à moins d'en « deviner » une, on applique la méthode de variation de la constante. $y = kx$ donne $y' = K + K'x$, et donc $xy' - y = K'x^2 = \ln(x)$.

On cherche donc une primitive à $K' = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$,

on obtient facilement en intégrant par parties :

$K = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right] + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.$

On obtient alors comme solution particulière : $y = -\ln(x) - 1$.

c) Les solutions de l'équation sont donc : $y = Kx - \ln(x) - 1$.

2) Avec la condition initiale $y(0) = 1$, on obtient $K = 1$ et donc : $f(x) = x - \ln(x) - 1$.

B) $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$

1) L'équation différentielle est linéaire, du second ordre à coefficients non constants avec second membre. On travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel le théorème s'applique, on connait donc l'existence de solutions et leur structure.

L'équation homogène associée est : $x^2y'' - xy' + y = 0$

a) On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme $y = x^\alpha$. Ce qui donne $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. On remarque que, comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, ces formules sont encore valables si α vaut 0 ou 1.

On réinjecte dans l'équation : $x^2y'' - xy' + y = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)x^\alpha = 0$, d'où $\alpha = 1$.

La vérification est élémentaire et, $x \mapsto x$ est donc solution de l'équation différentielle homogène associée.

b) On utilise encore la variation de la constante : $y = Kx$, $y' = K + K'x$ et $y'' = 2K' + K''x$.

On réinjecte dans l'équation : $x^2y'' - xy' + y = K''x^3 + K'x^2 = 0$.

Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $K''x + K' = 0$.

C'est bien une équation différentielle linéaire du premier ordre en K', sans second membre.

On obtient facilement une solution particulière $K' = \dfrac{1}{x}$ et donc $K = \ln(x)$.

Finalement, $x \mapsto x\ln(x)$ est une autre solution de l'équation différentielle homogène associée.

c) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre sur un intervalle convenable a une structure d'espace vectoriel de dimension 2.

La solution générale de $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc : $x \to \lambda x + \mu x\ln(x)$.

2) **a)** On pose $y_0 = -1 - \ln(x)$, d'où $y_0' = -\dfrac{1}{x}$ et $y_0'' = \dfrac{1}{x^2}$. $x^2y_0'' - xy_0' + y_0 = 1 + 1 - 1 - \ln(x) = 1 - \ln(x)$.

y_0 est bien une solution particulière de (E_2).

b) L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

$x \mapsto -1 - \ln(x) + \lambda x + \mu x\ln(x)$.

3) On sait qu'avec ces conditions initiales, (E_2) possède une solution unique.

On a $f(x) = x - \ln(x) - 1$ qui correspond à $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, c'est une solution de (E_2).

On a aussi $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$; f est donc l'unique solution de (E_2) qui vérifie ces conditions initiales.

II) Etude de la fonction f

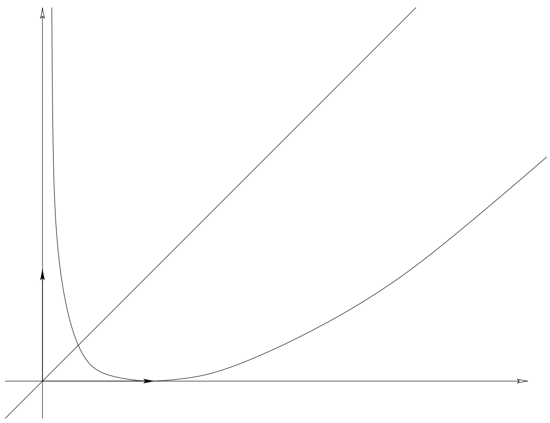
1) $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ est du signe de $x - 1$.
La limite de f en 0^+ est $+\infty$, ainsi que celle en $+\infty$ en utilisant cette fois le théorème des croissances comparées.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) En 0^+, on a une asymptote verticale.
En $+\infty$, on cherche la limite de : $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On a au moins une branche infinie de direction asymptotique $y = x$.
On cherche maintenant la limite de : $f(x) - x = -1 - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
On a finalement une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$.
Voici l'allure du graphe.



c) On a bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geqslant 0$, et donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - 1 \geqslant \ln(x)$.

2) **a)** $x\ln(x) - x$ est connue *par cœur* comme étant une primitive de $\ln(x)$, et donc
$x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x - (x\ln(x) - x) = \dfrac{x^2}{2} - x\ln(x)$ est une primitive de f.

b) On a ici une intégrale impropre avec une singularité en 0. Mais $\dfrac{x^2}{2} - x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, les primitives de f ont donc une limite finie en 0, l'intégrale de f converge donc en 0.

En appelant F la primitive de f calculée : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{x\to0} F(x) = \frac{1}{2}$.

c) On a maintenant une intégrale généralisée avec une singularité en $+\infty$, mais, ici, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve que cette intégrale diverge.

III) Comparaison des moyennes

1) **a)** On a montré que, pour des nombres positifs, $\ln(x) \leqslant x - 1$, les $\dfrac{a_i}{m_a}$ sont ici positifs,

ce qui prouve que : $\ln\dfrac{a_i}{m_a} \leqslant \dfrac{a_i}{m_a} - 1$, et en sommant ces inégalités, on obtient : $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln \dfrac{a_i}{m_a} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{m_a} - n,$

ou encore : $\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right) - n\ln(m_a) \leqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i) - nm_a}{m_a} = 0.$

Ce qui donne : $\ln\left(m_g^n\right) \leqslant n\ln(m_a)$, puis, en divisant par n, $\ln\left(m_g\right) \leqslant \ln(m_a)$.
Et comme le logarithme est croissant, $m_g \leqslant m_a$.

b) Pour avoir une égalité, il faut que, dans toutes les inégalités utilisées, on ait en fait une égalité ; c'est à dire que tous les $\dfrac{a_i}{m_a}$ vaillent 1.
On a donc : $m_g = m_a \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

c) L'inégalité proposée est ici grossièrement fausse, il faut remplacer $x^2y^2x^2$ par $x^2y^2z^2$.
L'inégalité à montrer est en fait : $x^2y^2z^2\left(x^2+y^2+z^2-4\right)+1 \geqslant 0$.
On appelle $x^2 = a_1$, $y^2 = a_2$ $z^2 = a_3$ ainsi que m_g et m_a les moyennes géométriques et arithmétiques de ces trois nombres.
L'inégalité à montrer devient : $m_g^3(3m_a-4)+1 \geqslant 0$.
Il n'y a pas de problème quand $3m_a - 4 \geqslant 0$.
Quand $3m_a - 4 \leqslant 0$, la valeur minimale de $m_g^3(3m_a-4)+1$ sera obtenue pour la valeur maximale de m_g, c'est à dire pour $m_g = m_a$.
Cette valeur est : $m_a^3(3m_a-4)+1$.
Il suffit donc d'étudier le signe de $x^3(3x-4)+1$ sur $\left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.
On pose $h(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$, on calcule $h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

qui nous donne les variations de h :

x	0 1 4/3
$h'(x)$	$-$ 0 $+$
$h(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

$h(x)$ est bien positif sur $\left[0, \dfrac{4}{3}\right]$, l'inégalité demandée est démontrée.

2) a) En appliquant l'inégalité précédente aux $\dfrac{1}{a_i}$, on obtient : $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}{n}$.

On passe aux inverses, ce qui donne : $\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$.

C'est à dire : $m_h \leqslant m_g$.

b) On a $m_h = m_g$ quand on a l'égalité à la question 1)b),
c'est à dire si et seulement si $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_2} = \cdots = \dfrac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

c) $m_h \leqslant m_g \leqslant m_a \Rightarrow m_h \leqslant m_a$.

Ce qui donne : $\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}$, qu'il suffit de réécrire : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$.

IV) Applications

1) On écrit $m_g \leqslant m_a$ avec les nombres $a_i = i$, ce qui donne : $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} i} \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i}{n} = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \dfrac{n+1}{2}$.

On a bien : $\sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

2) **a)** Pour $x \in [k-1, k]$, on a : $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k}$, ce qui entraine : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k}$.

Ceci n'a de sens que si l'intégrale considérée existe, c'est à dire si $k \geqslant 2$.

b) On obtient donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

en appliquant simplement l'inégalité précédente et la relation de Chasles.

c) L'inégalité précédente nous donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

En passant aux inverses et en multipliant par n, on obtient : $\dfrac{n}{1+\ln(n)} \leqslant \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

Cette dernière quantité est la moyenne harmonique en prenant $a_k = k$, qui est donc plus petite que la moyenne géométrique correspondante.

Ce qui donne : $m_h = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leqslant m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} = \sqrt[n]{n!}$

On a bien : $\dfrac{n}{1+\ln(n)} \leqslant \sqrt[n]{n!}$

3) **a)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+\ln(n)} = +\infty$, en utilisant les croissances comparées, et donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

b) Les questions 1) et 2)c) nous donnent un encadrement de $\sqrt[n]{n!}$, diviser cet encadrement par n donne : $\dfrac{1}{1+\ln(n)} \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{2n}$.

Ce qui donne : $0 \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant 1$, la suite est bien bornée.

4) **a)** On pose $u_n = \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \dfrac{1}{n}\ln(n!)$, on a donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\ln((n+1)!)$,

et on calcule $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}\ln(n+1) + \dfrac{1}{n+1}\ln(n!) - \dfrac{1}{n}\ln(n!) = \dfrac{n\ln(n+1) - \ln(n!)}{n(n+1)}$

On en déduit : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\ln\dfrac{(n+1)^n}{n!}}{n(n+1)} \geqslant 0$.

La suite (u_n) est donc croissante et il en est de même de la suite $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$.

b) La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est donc alternée répondant au critère spécial car la valeur absolue du terme général décroit — vu au 4)a) — et tend vers 0 — vu au 3)a) —.

V) Un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$

1) **a)** On a pour $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

b) On somme ces inégalités de $k = 2$ à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n!)$$
$$\leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

c) On utilise maintenant la primitive usuelle du ln :

$n\ln(n) - n \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1)$

On divise par n : $\ln(n) - 1 \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n} = \ln \sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{n}\ln(n+1) - \dfrac{n+1}{n}$

On en prend l'exponentielle : $\dfrac{n}{\mathrm{e}} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}}}$

Par ailleurs, à l'infini pour n, $(n+1)^{\frac{1}{n}} \to 1$, $\quad \mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}} \to \mathrm{e}$ $\quad$ et $\quad n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$.

Tout ceci implique que : $\quad \dfrac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\mathrm{e}}$.

Enfin : $\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\mathrm{e}}$.

2) $\sum \dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \sum \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ $\quad$ est une série positive de terme général équivalent à $\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, donc divergente.

Et, $\sum \dfrac{1}{(n!)^{\frac{2}{n}}} = \sum \dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2}$ $\quad$ est une série positive de terme général équivalent à $\dfrac{\mathrm{e}^2}{n^2}$, convergente.