

Les calculs demandés à la calculatrice seront fait avec Maple. Le package "linalg" est supposé chargé.

Préliminaire

> A1:=matrix(3,3,[4,0,14,3/2,1/2,6,-1,0,-7/2]);

$$A1 := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ -1 & 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

P.1 – On vient de définir A_1 , cherchons ses éléments propres :

> eigenvects(A1);

$$\left[\frac{1}{2}, 2, \{[0, 1, 0], [-4, 0, 1]\}, [0, 1, \left[\frac{-7}{2}, \frac{-3}{2}, 1\right]]\right]$$

On a donc ici $\frac{1}{2}$ valeur propre double et 0 valeur propre simple.

On obtient aussi facilement à la main ces valeurs propres en développant le polynôme caractéristique, c'est à dire le déterminant de $A_1 - \lambda I_3$ selon la deuxième colonne.

$$\det(A1 - \lambda I_3) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 14 \\ -1 & -\frac{7}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Ceci donne bien $\frac{1}{2}$, valeur propre double et 0 valeur propre simple, le polynôme caractéristique est scindé.

A_1 est alors diagonalisable si et seulement si le sous espace propre relatif à la valeur propre double est bien de dimension 2.

$$\text{Cela revient à chercher le noyau de } A_1 - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1 et a donc un noyau de dimension 2. A_1 est diagonalisable.

P.2 – On entre la matrice A_2 et on cherche ses éléments propres :

> A2:=matrix(3,3,[3,2*I,6*I,-2*I,3,7,2*I,-2,-5]);

$$A2 := \begin{bmatrix} 3 & 2I & 6I \\ -2I & 3 & 7 \\ 2I & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

> eigenvects(A2);

$$\left[I, 1, \left[\frac{1}{5} + \frac{3}{5}I, 1, \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}I\right]\right], \left[-I, 1, \left[-I, \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}I, 1\right]\right], \left[1, 1, \{[1, I, 0]\}\right]$$

On a trois valeurs propres simples $i, -i, 1$, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A_2 est diagonalisable.

P.3 – On fait la même chose pour A_3 .

> A3:=matrix(3,3,[1,1/2,1/2,1,3/2,3/2,-1,-1,-1]);

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

> `eigenvects(A3);`

$$\left[\frac{1}{2}, 1, \{[1, -1, 0]\}, [1, 1, \{[1, 1, -1]\}], [0, 1, \{[0, 1, -1]\}]\right]$$

Ceci nous permet de définir une matrice de passage, n'oublions pas que les vecteurs de Maple sont bien des vecteurs colonne.

> `P3:=matrix(3,3,[1,1,0,-1,1,1,0,-1,-1]);`

$$P3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vérifions que tout est correct :

> `D3:=evalm(P3^(-1)&*A3&*P3);`

$$D3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On nous demande explicitement P_3^{-1} :

> `P3moins1:=evalm(P3^(-1));`

$$P3moins1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Première partie

1 – On a : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad V_q[i, j] + \lambda W_q[i, j] \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} S[i, j] + \lambda T[i, j] = (S + \lambda T)[i, j].$

Par définition de la limite d'une suite de matrices, on a bien le résultat demandé.

2 – $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, \quad (V_q W_q)[i, j] = \sum_{k=1}^p V_q[i, k] W_q[k, j] \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p S[i, k] T[k, j] = (ST)[i, j].$

Comme à la question précédente, il suffit alors d'appliquer la définition de la limite d'une suite de matrices.

3 – On applique le résultat précédent à (A_q) et à la suite constante (P) , ce qui donne $A_q P \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} BP.$

On applique maintenant de nouveau ce résultat aux suites (P^{-1}) et $(A_q P)$,

ce qui donne $P^{-1} A_q P \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} P^{-1} B P.$

On applique encore le même résultat aux suites (A_q) et (X) , ce qui donne $A_q X \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} B X.$

On applique enfin le premier résultat démontré aux suites $(A_q X)$ et (Y) ,

ce qui donne $A_q X + Y \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} B X + Y.$

4 –

$$4.1 - A^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^q \end{pmatrix}, \text{ ici, } \lambda_i^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0, \text{ ce qui donne : } A^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0.$$

4.2 – si $|\lambda_i| > 1$, la suite $(|\lambda_i|^q)$ diverge, il en est de même de la suite (λ_i^q) et donc de la suite (A^q) .

4.3 –

4.3.1 – La limite de (λ^q) est z , donc la limite de $(|\lambda^q|)$ est $|z| = 1$ car la suite des modules est la suite constante 1.

4.3.2 – $\lambda^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} z$ d'une part et $\lambda^{q+1} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} z$ d'autre part.

On peut faire le quotient car aucun de ces nombres n'est nul, ce qui donne : $\lambda \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1$, et enfin : $\lambda = 1$.

4.3.3 – On vient de montrer que la suite (λ_i^q) converge si et seulement si $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

On a donc la suite (A^q) converge si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

5 – $A = PDP^{-1}$ avec D répondant aux conditions de la question 4.1, et en utilisant le résultat du 3, $A^q = PD^qP^{-1} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

6 – Les valeurs propres de A_1 sont $\frac{1}{2}$ et 0, donc (A_1^q) converge vers la matrice nulle.

i est valeur propre de A_2 , de module 1 et différente de 1, donc (A_2^q) diverge.

Les valeurs propres de A_3 sont $\frac{1}{2}$, 1 et 0, donc (A_3^q) converge vers la matrice $P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_3^{-1}$.

Le calcul de cette limite est détaillé ci-dessous.

> D3lim:=matrix(3,3,[0,0,0,0,1,0,0,0,0]);

$$D3lim := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> A3lim:=evalm(P3&*D3lim&*P3^(-1));

$$A3lim := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

7 –

$$7.1 - \text{On a très facilement : } S_q = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^q \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=1}^q \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$7.2 - S_q = \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} PD^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} P e^D P^{-1}.$$

7.3 – Ici on a : $e^{A_3} = P e^{D_3} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$

Le calcul donne :

> `expD3:=matrix(3,3,[exp(1/2),0,0,exp(1),0,0,0,1]);`

$$\exp D3 := \begin{bmatrix} e^{(1/2)} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `expA3:=evalm(P3*expD3*P3^(-1));`

$$\exp A3 := \begin{bmatrix} e & -e^{(1/2)} + e & -e^{(1/2)} + e \\ -1 + e & e^{(1/2)} + e - 1 & e^{(1/2)} + e - 2 \\ 1 - e & 1 - e & 2 - e \end{bmatrix}$$

Deuxième partie

1 – 1 n'est pas valeur propre de A , donc $\det(A - I_n) \neq 0$, et donc $A - I_n$ est inversible.

2 – $AS + B = S \Leftrightarrow (A - I_n)S = -B \Leftrightarrow S = -(A - I_n)^{-1}B.$

Le système a bien une solution unique explicitée ici.

3 – On montre ce résultat par récurrence.

Pour $q = 0$, $A^0(X_0 - S) + S = (X_0 - S) + S = X_0$. L'amorce est vérifiée.

On admet le résultat au rang q , on va le montrer au rang $q + 1$.

$$X_{q+1} = AX_q + B = A(A^q(X_0 - S) + S) + B = A^{q+1}(X_0 - S) + AS + B = A^{q+1}(X_0 - S) + S.$$

On a donc montré la propriété au rang $q + 1$ et donc : $\forall q \in \mathbb{N}, \quad X_q = A^q(X_0 - S) + S.$

4 – Sous ces hypothèses, $A^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$, et donc $X_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} S.$

Troisième partie

1 – Les premières et dernières coordonnées sont des cas particuliers :

$$\begin{pmatrix} F(1, t + \tau) \\ F(2, t + \tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(n, t + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(1, t) \\ F(2, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(n, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

2 – Il suffit de prendre $t = q\tau$ pour que la relation de récurrence soit celle de la première question.

3 –

3.1 – On écrit la procédure en Maple. Le package *linalg* étant supposé chargé.

```

> X:=proc(q)
> local A,B,Xq,i;
> A:=matrix(4,4,[0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0]);
> B:=vector([10,0,0,50]);
> Xq:=vector([20.0,20.0,20.0,20.0]);
> for i from 1 to q do
> Xq:=evalm(A&*Xq+B) od;
> evalm(Xq)
> end;

```

```

X := proc(q)
local A, B, Xq, i;
  A := matrix(4, 4, [0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0]);
  B := vector([10, 0, 0, 50]);
  Xq := vector([20.0, 20.0, 20.0, 20.0]);
  for i to q do Xq := evalm('&*'(A, Xq) + B) end do;
  evalm(Xq)
end proc

```

3.2 – On fait simplement tourner la procédure précédente :

```

> X(10);
[32.89062500, 45.78125000, 62.96875000, 80.15625000]

```

4 –

4.1 – $U_\omega = 0 \Rightarrow \sin(\omega) = 0$ en regardant le premier terme.

Par ailleurs, $\sin(\omega) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \sin(k\omega) = 0$.

Ce qui prouve que $\sin(\omega) = 0 \Rightarrow U_\omega = 0$.

On a bien l'équivalence demandée.

4.2 – En ne regardant encore une fois que la première coordonnée,

$$AU_\omega = \lambda U_\omega \Rightarrow \frac{\sin(2\omega)}{2} = \lambda \sin(\omega) \Rightarrow \sin(\omega) \cos(\omega) = \lambda \sin(\omega),$$

et comme $\sin(\omega) \neq 0$, on a bien $\lambda = \cos(\omega)$.

4.3 – Si $\lambda = \cos(\omega)$, dans l'égalité $AU_\omega = \lambda U_\omega$,

l'égalité de la première coordonnée est bien sûr vérifiée,

et de la seconde à l'avant dernière coordonnée, c'est à dire pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a :

$\sin((k-1)\omega) + \sin((k+1)\omega) = 2 \cos(\omega) \sin(k\omega)$, c'est simplement la transformation d'une somme en produit.

L'égalité est alors équivalente à l'égalité des dernières coordonnées,

c'est à dire : $\sin((n-1)\omega) = 2 \cos(\omega) \sin(n\omega)$ qui est équivalent à $\sin((n+1)\omega) = 0$.

Comme $\omega \in]0, \pi[$, on obtient : $\omega = \frac{k\pi}{n+1}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4.4 – $\lambda_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est donc valeur propre. Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, ces valeurs propres sont distinctes deux à deux et dans l'intervalle $] -1, 1[$.

On a donc une matrice d'ordre n avec n valeurs propres distinctes, ce qui prouve qu'on a toutes les valeurs propres et qu'elles sont toutes simples.

A est donc diagonalisable et on peut prendre comme matrice de passage la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $U_{\frac{k\pi}{n+1}}$.

Par ailleurs, comme A est symétrique réelle, on avait à priori la diagonalisabilité qui était assurée...

5 – A vérifie donc les hypothèses de la question 4 de la deuxième partie, la suite (X_q) est définie par la même relation de récurrence dans les deuxième et troisième parties, le résultat obtenu est donc applicable et $X_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} S$.

S est donc le vecteur des températures d'équilibre.

6 – On utilise encore Maple.

```
> A:=matrix(4,4,[0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> I4:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]);
```

$$I4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=vector([10,0,0,50]);
```

$$B := [10, 0, 0, 50]$$

```
> S:=evalm((I4-A)^(-1)&*B);
```

$$S := [36, 52, 68, 84]$$

Quatrième partie

1 – Si la suite (A^q) converge, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(A^q E_k)$ converge.

Réciproquement, si la suite $(A^q E_k)$ converge, la suite $(C_k(q))$ converge, donc toutes les suites $(A^q[i, k])$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ convergent.

Finalement, $\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(A^q[i, k])$ converge, et donc la suite (A^q) converge.

On a bien montré l'équivalence.

2 – Si la suite (A^q) converge, la suite $(A^q X)$ converge.

Réciproquement, si toutes les suites $(A^q X)$ convergent, les suites $(A^q E_k)$ convergent et donc la suite (A^q) converge.

On a bien encore montré l'équivalence.

3 –

3.1 – Montrons d'abord par récurrence que $\|A^q X\| \leq k^q \|X\|$.

Pour $q = 0$, c'est une égalité.

On l'admet au rang q , on calcule $\|A^{q+1} X\| = \|A(A^q X)\| \leq k \|A^q X\| \leq k^{q+1} \|X\|$.

On l'a donc montré au rang $q + 1$.

Finalement : $\forall q \in \mathbb{N}, \|A^q X\| \leq k^q \|X\|$.

Ce qui prouve que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}, A^q X \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$, et donc : $A^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

3.2 – L'amorce étant une égalité, on montre comme à la question précédente que :

$\forall q \in \mathbb{N}, \|A^q X\| \geq k^q \|X\|$, en remplaçant simplement $\leq$ par $\geq$.

Si on prend un $X \neq 0$, alors $\|A^q X\| \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui prouve que la suite (A^q) diverge.

4 – $\varphi(X) = \|A^q X\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX {}^tAAX = {}^tX ({}^tAAX) = (X|g(X))$.

5 – tAA est symétrique, car égale à sa transposée, et réelle, donc diagonalisable en utilisant au besoin une matrice de passage P orthogonale.

6 – On diagonalise donc tAA en utilisant la matrice de passage P orthogonale, on pose $X = PY$, ce qui donne ${}^tX = {}^tY {}^tP = {}^tY P^{-1}$.

$D = P^{-1} {}^tAAP$ est diagonale portant les valeurs propres λ_i sur sa diagonale, et Y est le vecteur de coordonnées les y_i .

On a alors : $\varphi(X) = {}^tX {}^tAAX = {}^tY P^{-1} {}^tAAP Y = {}^tY D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$.

Mais $\varphi(X)$ est un carré scalaire, toujours positif, donc : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall y_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$.

Ceci implique que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \geq 0$,

il suffit de prendre $y_i = 1$ et les autres nuls pour obtenir $\lambda_i \geq 0$.

7 – On a $\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n k_1 y_i^2 = k_1 \|Y\|^2 = k_1 \|X\|^2$.

On a aussi $\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n k_0 y_i^2 = k_0 \|Y\|^2 = k_0 \|X\|^2$.

En effet la matrice de passage est orthogonale et conserve donc la norme des vecteurs.

7.1 – Si $k_1 < 1$, on a les hypothèses de la question 3.1 qui sont vérifiées, et donc la suite (A^q) converge vers la matrice nulle.

7.2 – Si $k_0 > 1$, on a les hypothèses de la question 3.2 qui sont vérifiées, et donc la suite (A^q) diverge.

8 – $k_1 < 1$ majore les valeurs propres, donc 1 n'est pas valeur propre de A .

Par ailleurs, on sait que $\|AX\|^2 \leq k_1 \|X\|^2$, ce qui donne : $\|AX\| \leq \sqrt{k_1} \|X\|$.

Rappelons que $X_q = A^q (X_0 - S) + S$, et donc $X_q - S = A^q (X_0 - S)$.

Ce qui donne : $\|X_q - S\| \leq \sqrt{k_1} \|A^{q-1} (X_0 - S)\| \leq \dots \leq (\sqrt{k_1})^q \|X_0 - S\|$, par une récurrence facile à écrire.

9 – $(\|X_q - S\|)$ est décroissante, il suffit donc d'être sûr de cette inégalité pour une valeur q_0 .

Ici, $k_1 = \cos \frac{\pi}{5}$, Il suffit d'avoir $(\sqrt{k_1})^q \|X_0 - S\| \leq 1$, c'est à dire : $q \geq -2 \frac{\ln \|X_0 - S\|}{\ln(k_1)}$

et on fait le calcul avec Maple :

```
> k1:=evalf(cos(Pi/5));
                                k1 := .8090169943
> X0:=vector([20.0,20.0,20.0,20.0]);
                                X0 := [20.0, 20.0, 20.0, 20.0]
> q:=ceil(-2*ln(norm(X0-S,2))/ln(k1));
                                q := 43
> X(43);
[35.99647362, 51.99538391, 67.99429420, 83.99714710]
```

Comme $\|X_{q_0} - S\| \leq 1$, la même inégalité est valable pour toutes ses coordonnées.

D'où : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |F(k, q_0 \tau) - S_k| \leq 1$, ce qui est exactement l'encadrement demandé.

En résumé, au bout du temps $q_0 \tau$, chaque point de la barre est à sa température d'équilibre à 1 degré près.