I. La méthode des traces

1. **a/** $a_0 = (-1)^n$ est un résultat du cours.

b/ On travaille sur $\mathbb{C}$, donc la polynôme caractéristique est scindé ; par ailleurs, ses racines sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de la matrice. Il suffit alors, comme c'est fait ici, de mettre a_0 en facteur pour avoir le même coefficient en λ^n et obtenir la factorisation indiquée.

c/ Toujours d'après le cours, a_n est le déterminant mais aussi le produit des valeurs propres.

On a donc : $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Enfin, on sait par le cours sur les polynômes que $\dfrac{-a_1}{a_0}$ est la somme des racines, distinctes ou confondues, de ce polynôme sur $\mathbb{C}$.

D'où : $a_1 = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

2. A et T sont semblables, d'où A^p et T^p aussi en utilisant la même matrice de passage, ou, ce qui revient au même, le même changement de base ($p \in \mathbb{N}$).

Par ailleurs, on sait que les valeurs propres de A^p sont les λ^p, avec λ valeur propre de A. Au besoin, il suffit de considérer un couple valeur propre vecteur propre de A.

Ce qui donne : $\operatorname{tr} T^p = \operatorname{tr} A^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p$.

On aurait aussi pu travailler par récurrence en calculant les termes diagonaux de T^p.

3. $\chi_A(\lambda) = a_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$, d'où : $\chi'_A(\lambda) = a_0 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\lambda - \lambda_k) \right)$

Ce qui donne : $\dfrac{\chi_A(\lambda)}{\chi'_A(\lambda)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\lambda - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$.

4. Si $|\lambda| > \max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} |\lambda_k|$, alors : $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_k} = \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda}} = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^p$.

Ce qui donne : $\dfrac{\chi_A(\lambda)}{\chi'_A(\lambda)} = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^p$.

5. On a la somme de n séries convergentes qu'on écrit, par linéarité, comme la somme d'une seule série.

Ce qui donne : $\dfrac{\chi_A(\lambda)}{\chi'_A(\lambda)} = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^p = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p}{\lambda^p} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr} A^p}{\lambda^p}$.

La condition sur λ est la même qu'à la question précédente.

6. $\chi_A(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$ et donc : $\chi'_A(\lambda) = n\, a_0 \lambda^{n-1} + (n-1) a_1 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$.

La relation de la question précédente peut s'écrire : $\lambda\, \chi'_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{tr} A^p}{\lambda^p}$.

Pour $\lambda \neq 0$, on divise par λ^n et on pose $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$, ce qui donne :

$$n\,a_0 + (n-1)a_1\,\mu + \cdots + 1\,a_{n-1}\mu^{n-1} = (a_0 + a_1\mu + \cdots + a_n\mu^n)\sum_{p=0}^{+\infty} \operatorname{tr} A^p\,\mu^p$$

qui est valable pour $\left|\mu\right| < \dfrac{1}{\max\limits_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} |\lambda_k|}$ et $\mu \neq 0$.

Par ailleurs, pour $\mu = 0$, $A^0 = I_n$ dont la trace est n, la relation est donc vérifiée aussi puisqu'elle se réduit à $n\,a_0 = n\,a_0$.

Pour terminer, on réécrit cette relation en remplaçant cette fois μ par λ.

7. Dans la relation précédente, réécrite en λ, on cherche à gauche et à droite du signe « = » le coefficient de λ^k pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On obtient : $(n-k)\,a_k = a_0 \operatorname{tr} A^k + a_1 \operatorname{tr} A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \operatorname{tr} A + a_k \operatorname{tr} I_n$.

En soustrayant $n\,a_k$ à gauche et à droite, cela donne : $-k\,a_k = a_0 \operatorname{tr} A^k + a_1 \operatorname{tr} A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \operatorname{tr} A$.

8. On a donc, en travaillant sur $\mathbb{C}$, trouvé les a_k. Ceci dit, si A est reelle, on la considère comme une matrice complexe, on applique les relations précédentes, et on trouve la polynôme caractéristique sur $\mathbb{C}$, qui est aussi le polynôme caractéristique sur $\mathbb{R}$!

Les relations de Newton restent vraies quand on travalille sur $\mathbb{R}$.

II. Mise en place de l'algorithme

1. Il faut calculer les n^2 termes de la matrice produit, chaque calcul nécessite n multiplications et $n-1$ additions, il y a donc à priori $(2n-1)n^2$ opérations dans le calcul du produit de 2 matrices.

La complexité du produit de 2 matrices est n^3.

2. Pour calculer la trace, il y a $n-1$ additions, la complexité du calcul de la trace est n.

3. **a/** On suppose toutes les variables connues de la procédure Maple, la package linalg étant chargé.

```
B:=evalm(A);
for k from 1 to n do
   t[k]:=trace(B);
   B:=evalm(B&*A)
od;
```

b/ On calcule B^n par $n-1$ produits de matrices, ce qui est d'une complexité n^4.

On a besoin aussi de n traces de matrices, chaque calcul de trace nécessite $(n-1)$ additions, ce qui est d'une complexité n^2.

Finalement la complexité du programme précédent est n^4.

On aurait obtenu n^5 si on n'avait pas utilisé de matrice B et donc recalculé à chaque fois A^k. Mais il est probable que, dans ce cas, la fonction `remember` de Maple aurait permis de rester en n^4 ! A moins d'avoir désactivé cette fonction, mais ceci est une autre histoire...

4. **a/** On se place dans les mêmes conditions que pour la procédure précédente.

```
a[0]:=(-1)**n;
for k from 1 to n do
   a[k]:=-1/k*sum(a[i]*t[k-i],i=0..k-1)
od;
```

b/ a_n, on l'a déjà dit, est le déterminant de A.

c/ Le calcul de a_k nécessite 1 division, k produits et $k-1$ sommes ; le calcul de tous les a_k est donc au plus en n^2, négligeable devant le produit des matrices, la complexité de l'algorithme des traces reste en n^4.

d/ La méthode naïve est en $n!$. En effet, un déterminant d'ordre $n+1$ nécessite le calcul de $n+1$ déterminants d'ordre n et de n additions. Ce nombre d'additions est négligeable devant le calcul des déterminants d'ordre inférieur.

La complexité de la méthode naïve est donc en $n!$.

Par ailleurs, une fois qu'on a le polynôme caractéristique, il faut encore, par exemple par calcul des dérivées successives en 0, retrouver ses coefficients.

III. Trois exemples et une application

1. Exemple 1.

a/ Quand l'espace vectoriel de départ est de dimension finie, la donnée des images des vecteurs d'une base par f linéaire détermine complètement f.

Clairement, la matrice de f dans la base B est : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le rang est $n-1$,

le noyau, de dimension 1, est engendré par $\overrightarrow{e_n}$,

et l'image est : $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}\right)$.

b/ Si on ajoute des $-\lambda$ sur la diagonale, la matrice $A - \lambda I_n$ reste triangulaire et son déterminant, le polynôme caractéristique de A, est $(-1)^n \lambda^n$.

c/ Toutes les valeurs propres de A sont donc nulles, de même pour A^k avec $k \geqslant 1$, et les traces correspondantes sont nulles. Pour ces valeurs de k, les a_k sont donc nuls. Il ne reste que $a_0 = (-1)^n$.

On a bien le polynôme caractéristique de A par la méthode des traces.

2. Exemple 2.

On a facilement la matrice de f dans la base indiquée : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'image est engendrée par les images des vecteurs de la base, qui sont aussi ici les vecteurs de la base, c'est donc $\mathbb{R}^n$.

Le rang est donc n et le noyau est réduit au vecteur nul.

Pour le polynôme caractéristique, on calcule le déterminant en le développant suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1}$.

Par la méthode des traces, la trace de A est nulle car tous les termes diagonaux sont nuls, il est est de même pour $A^2, \ldots, A^{n-1}$. Par contre, $A^n = I_n$ dont la trace est n.

On obtient alors, pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $a_k = 0$.

Et enfin : $a_n = -\dfrac{1}{n}(-1)^n\, n = (-1)^{n+1}$.

Et en utilisant a_0, on retrouve bien sûr encore le polynôme caractéristique par la méthode des traces.

3. Exemple 3.

a/ On choisit une base orthonormale dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$. Dans cette base, la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient facilement son polynôme caractéristique : $(1-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n+1}\lambda^{n-1}$.

b/ On sait que, comme $\overrightarrow{u}$ est normé, $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{u}$.

Toutes les colonnes de A sont donc proportionnelles au vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec le coefficient u_k pour la colonne k car $\left\langle \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{u} \right\rangle = u_k$.

La matrice de f dans la base canonique est donc : $\begin{pmatrix} u_1^2 & u_2u_1 & \cdots & u_nu_1 \\ u_1u_2 & u_2^2 & \cdots & u_nu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1u_n & u_2u_n & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{u}$ est normé, la trace de A est 1.

Par ailleurs, une projection f vérifie $f \circ f = f$, et donc : $A^2 = A$. Les traces de toutes les matrices A^k pour $k \geqslant 1$ sont donc égales à 1.

Ce qui donne :

$a_0 = (-1)^n$

$a_1 = -a_0 = (-1)^{n+1}$

$a_2 = -\dfrac{1}{2}(a_0 + a_1) = 0$

$a_3 = -\dfrac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2) = 0$

et de même ensuite par récurrence immédiate jusque a_n.

On retrouve bien le polynôme caractéristique de f par la méthode des traces.

4. Une application.

a/ Comme on l'a déjà vu, si toutes les traces de A^k pour $k \geqslant 1$ sont nulles, $\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$.

0 est l'unique zéro de ce polynôme, donc l'unique valeur propre.

A est dans la base canonique la matrice d'un endomorphisme f, et,comme le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base $\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\right)$ où la matrice de f est T triangulaire supérieure. Comme la diagonale est alors constituée des valeurs propres, T est strictement triangulaire supérieure.

On a alors : $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_k}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{k-1}}\right)$ pour $k \geqslant 2$,

et aussi : $f\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right) = \overrightarrow{0}$.

On en conclut par une récurrence facile à écrire que $f^n = 0$ et donc que $A^n = [0]$.

b/ Si λ est une valeur propre de A, alors, en considérant un vecteur propre associé, λ^n est valeur propre de A^n, donc $\lambda^n = 0$ et enfin $\lambda = 0$.

Par ailleurs, 0 est valeur propre de A car celle ci n'est pas inversible, auquel cas A^n le serait aussi.

0 est bien l'unique valeur propre de A.

c/ Si $A^n = [0]$, 0 est bien l'unique valeur propre de A sur $\mathbb{C}$, comme de $A^2, \ldots, A^n$. Ainsi les traces de toutes ces matrices sont nulles.

De plus, on a déjà montré que si les traces de toutes ces matrices sont nulles, alors $A^n = [0]$.

On a bien l'équivalence demandée.