Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être un erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Exercice I

Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier naturel.

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right]$.

1.1. Montrer qu'elle est à termes positifs.

1.2. Etudier sa convergence.

2. On pose $A_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2+\sqrt{3}\right)^n$; montrer que A_n est entier.

3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n \pi\right]$.

4. Quel est le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n x^n$;
préciser les cas $x = \pm R$.

Exercice II

On rappelle que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u}\,du$ où a est un réel

2.

2.1. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$

2.2. Calculer *J*.

3. On considère $K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au).\sin(bu)}{u^2}\,du$, où *a* et *b* sont des réels.

3.1. Exprimer *K(a,b)* à l'aide de *I(a+b)* et *I(a-b)*.

3.2. En déduire les valeurs de *K(a,b)* en distinguant les différentes régions du plan *(a,b)*.

3.3. Donner une expression de *K(a,b)* regroupant les différents cas.

Problème

Toutes les fonctions considérées dans les parties I, II et III de ce problème appartiennent à l'ensemble C^0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Partie I

On considère l'équation $(E_{1/2})$ d'inconnue *f* élément de C^0:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x+t) f(t)\,dt = g(x)$, où *g* est une fonction donnée de C^0.

1. Soit *f* solution de l'équation $(E_{1/2})$

1.1 Monter que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + ax + b$, où *a* et *b* sont des réels qui s'expriment par des intégrales dépendant de *f*.

1.2. Ecrire en fonction de *g* le système d'équations vérifié par *a* et *b*.

2. En déduire *a* et *b*, puis *f* dans le cas où $g(x) = x$.

Partie II

On considère l'équation (E_λ) d'inconnue *f* élément de C^0 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-\lambda\int_{-1}^{+1}(x+t)f(t)\,dt = g(x)$ où *g* est un élément donné de C^0 et λ un réel.

1. En reprenant le procédé de la partie I, montrer que, sauf pour deux valeurs particulières λ_1 et λ_2 du paramètre λ, (E_λ) admet une solution unique pour toute fonction *g*.

2. A quelle condition sur *g* l'équation (E_{λ_1}) admet-elle des solutions ?
Même question pour (E_{λ_2}).

3. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{+1}(1-3t^2)\,dt$.

4. En déduire dans le cas $\lambda=\lambda_1$ (resp. $\lambda=\lambda_2$) un exemple de fonction g_1 (resp. g_2), non identiquement nulle, vérifiant la condition trouvée à la question 2 de la partie **II.**

5. On choisit pour *g* la fonction nulle.

5.1. Quelle est la solution de (E_λ) pour λ distinct de λ_1 et λ_2 ?

5.2. Exprimer f_1 et f_2, solutions respectives de (E_{λ_1}) et (E_{λ_2}).

5.3. Que dire de $\int_{-1}^{+1} f_1(t)f_2(t)\,dt$?

Partie III

On note *K* l'application qui à toute fonction *h* de C^0 associe la fonction *Kh* définie sur $\mathbb{R}$ par : $[Kh](x)=\int_{-1}^{+1}k(x,t)h(t)\,dt$, où *k* est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. Montrer que *K* est linéaire et que *Kh* est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Comment l'équation $(E): f(x)-\int_{-1}^{+1}k(x,t)f(t)\,dt = g(x)$ s'écrit-elle ?

3. On note $K^2h = K[Kh]$ et $K^{n+1}h = K\left[K^n h\right]$. Montrer formellement, c'est-à-dire sans considération de convergence, que $f = g+\sum_{n\geq 1}K^n g$ est solution de l'équation *(E).*

4. On pose $k(x,t)=\frac{1}{2}(x+t)$ et $g(x)=x$.

4.1. Déterminer Kg puis K^2g.

4.2. Exprimer par récurrence $K^n g$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire f par application de la question 3, et retrouver ainsi le résultat de la question I.3.

Partie IV

Soit Δ un intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$, avec $\alpha<\beta$. Toutes les fonctions considérées dans cette partie, appartiennent à l'ensemble $\mathrm{C}^0(\Delta)$ des fonctions continues sur Δ, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application qui, au couple (F,G) de fonctions de $\mathrm{C}^0(\Delta)$, fait correspondre le réel $\int_{\Delta} F(\mathrm{t})G(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

Cette application définit un produit scalaire, noté $<,>$. On notera $\| \ \|$ la norme associée.

1. On utilise les notations de la partie III, et on pose $k(x,t)=a(x)b(t)+a(t)b(x)$, où les fonctions a et b sont orthogonales entre elles : $<a,b>=0$, et normées : $\|a\|=\|b\|=1$.

On pose $\varphi_1=a+b$ et $\varphi_2=a-b$. Vérifier que $K\varphi_1=\varphi_1$ et $K\varphi_2=-\varphi_2$. En déduire que 1 et -1 sont valeurs propres de K. Que peut- on dire alors de φ_1 et φ_2 ?

On admettra que 1 et -1 sont les seules valeurs propres non nulles de K, et que les espaces propres associés sont de dimension 1, engendrés respectivement par φ_1 et φ_2.

2. On considère l'équation d'inconnue f élément de $\mathrm{C}^0(\Delta)$: $f-\lambda Kf=g$, où g est une fonction donnée de $\mathrm{C}^0(\Delta)$ et λ un réel non nul. On suppose qu'elle admet au moins une solution f_0.

2.1. Montrer que si $\lambda\neq\pm1$, cette solution est unique.
2.2. Ecrire l'ensemble des solutions si $\lambda=\pm1$.

3. h étant une fonction donnée, montrer que Kh s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions φ_1 et φ_2.

4. Exprimer $K^n h$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire que, pour $0 < |\lambda| < 1$ la solution de l'équation $f - \lambda K f = g$ obtenue sous la forme : $f = g + \sum_{n \geq 1} \lambda^n K^n g$ s'écrit $f = g + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$, où A_1 et A_2 sont sommes de séries géométriques.

6. Préciser *f* si *g* est orthogonal à la fois à φ_1 et à φ_2.

7. Application : on choisit $\Delta = [-\pi, \pi]$, $k(x,t) = \dfrac{\sin(x+t)}{\pi}$, $g(x) = \sin 2x$;

7.1. Vérifier que *k* satisfait aux hypothèses de la question 1 de la partie IV.

7.2. Vérifier que *g* satisfait aux hypothèses de la question 6 de la partie IV.

7.3. Résoudre alors les équations : $f - \dfrac{1}{2} K f = g$ et $f - K f = g$.

Fin de l'énoncé