Exercice I

1. Etude de la série de terme général : $u_n = \sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right)$

 1.1. On a : $1 < 2-\sqrt{3} < 1$, et donc : $0 < \left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi < \pi$, et enfin : $\sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right) > 0$.

 1.2. La limite nulle à l'infini de $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi$ est évidente et donc : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi$.
 Par équivalence à une série géométrique positive convergente, la série des u_n converge.

2. $A_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2+\sqrt{3}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left((-1)^k+1\right)\left(\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k}$,
qui est une somme d'entiers pairs (k pair) ou nuls (k impair), c'est donc un entier pair.

3. $v_n = \sin\left(A_n\pi - \left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right) = \sin\left(-\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right) = -u_n$.
C'est bien le terme général d'une série convergente par linéarité des séries convergentes.

4. $|u_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\, |x|^n$, d'où : $\left|\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left(2-\sqrt{3}\right)|x|$.
Cet équivalent est aussi la limite du quotient, et donc : $R = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.
Par ailleurs, en R, on se retrouve avec une série numérique dont le terme général est équivalent à $\dfrac{u_n}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}$ qui tend vers π à l'infini. La série diverge donc puisque la limite du terme général n'est pas nulle. Il en est de même en $-R$.

Exercice II

1. L'intégrale est nulle pour $a = 0$.
Pour $a > 0$, on pose $t = au$, changement de variable monotone de classe $\mathscr{C}^1$ qui transforme une intégrale généralisée en intégrale de même nature et égale en cas de convergence.
On retrouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ qui est simplement I. Donc, $I(a)$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
De la même façon, pout $a < 0$, on pose $t = -au$ et on retrouve cette fois ci $-I$. $I(a)$ est encore convergente et vaut dans ce cas $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. Calcul de J.

 2.1. C'est une intégrale généralisée d'une fonction continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.
 On a un problème de convergence de l'intégale en 0 et en $+\infty$.
 En 0, $\dfrac{\sin^2 u}{u^2} \to 1$, on a un faux problème, l'intégrale converge.
 En $+\infty$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^2 u}{u^2} \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$.
 Par critère de comparaison des fonctions positives, l'intégrale converge en ∞.
 Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge.

 2.2. On va faire une intégration par partie dans des intégrales généralisées en intégrant $\dfrac{1}{u^2}$. On pose donc : $f(u) = \dfrac{-1}{u}$ et $g(u) = \sin^2 u$, fonctions clairement de classe $\mathscr{C}^1$.
 On a besoin d'avoir des limites finies pour $f(u)\,g(u)$ en 0 et en $+\infty$. Ces limites sont faciles à trouver, toutes deux nulles. Les deux intégrales sont donc de même nature, ici égales car le crochet est nul.
 Ce qui donne : $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sin u\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u}\,\mathrm{d}u = I(2) = \frac{\pi}{2}$.

3. Calcul de $K(a,b)$.

3.1. On écrit d'abord $K(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(a-b)u - \cos(a+b)u}{2u^2}\,\mathrm{d}u$.

On fait ensuite la même intégration par partie que dans la question précédente.

$f(u)\,g(u) = \dfrac{\cos(a-b)u - \cos(a+b)u}{2u}$ dont la limite est nulle à l'infini et, par un calcul élémentaire, également nulle en 0.

L'intégration par parties est donc possible, et, comme le crochet est nul, sous réserve de convergence, les deux intégrales sont égales.

La deuxième intégrale est : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(a+b)\sin(a+b)u - (a-b)\sin(a-b)u}{2u}\,\mathrm{d}u$, qui est bien convergente car on reconnait une combinaison linéaire de $I(a+b)$ et de $I(a-b)$.

Finalement : $K(a,b) = \dfrac{a+b)}{2}I(a+b) - \dfrac{a-b}{2}I(a-b)$.

3.2. Selon le signe de $a+b$ et $a-b$, on va avoir 4 régions ouvertes et 4 demi droites.

$b > a$ et $b > -a$: $K(a,b) = b\dfrac{\pi}{2}$;

$b > a$ et $b < -a$: $K(a,b) = -a\dfrac{\pi}{2}$;

$b < a$ et $b > -a$: $K(a,b) = a\dfrac{\pi}{2}$;

$b < a$ et $b < -a$: $K(a,b) = -b\dfrac{\pi}{2}$;

$b = -a > 0$: $K(a,b) = b\dfrac{\pi}{2} = -a\dfrac{\pi}{2}$;

$b = -a < 0$: $K(a,b) = -b\dfrac{\pi}{2} = a\dfrac{\pi}{2}$;

$b = a > 0$: $K(a,b) = b\dfrac{\pi}{2} = a\dfrac{\pi}{2}$;

$b = a < 0$: $K(a,b) = -b\dfrac{\pi}{2} = -a\dfrac{\pi}{2}$;

$a = b = 0$: $K(0,0) = 0$.

3.3. On obtient facilement : $K(a,b) = \dfrac{\pi}{4}\left(|a+b| - |a-b|\right)$.

Problème

Première partie

1. Solutions de $E_{1/2}$.

1.1. $f(x) = g(x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) + \frac{1}{2}\left(x\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

On a donc : $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, et $b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

1.2. On écrit : $g(x) + ax + b - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)\left(g(t) + at + b\right)\,\mathrm{d}t = g(x)$.

Ce qui donne : $ax + b - \dfrac{1}{2}\left(x\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t + x\int_{-1}^{1} at + b\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} tg(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} at^2 + bt\,\mathrm{d}t = 0\right)$

Et enfin, en égalant les termes en x et les termes constants :

$a - b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$

$-\dfrac{a}{3} + b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} tg(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Si $g(x) = x$, alors :
$a - b = 0$
$-\dfrac{a}{3} + b = \dfrac{1}{3}$.
Ce qui donne facilement : $a = b = \dfrac{1}{2}$, et $f(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Partie II

1. $f(x) = g(x) + \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} (x+t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) + \lambda \left(x \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} t f(t)\,\mathrm{d}t \right)$.
On a donc : $a = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, et : $b = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} t f(t)\,\mathrm{d}t$ qui conviennent comme ci-dessus.
On obtient en remplaçant f en fonction de g, et en égalant les termes en x et les termes constants :
$a - 2\lambda b = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$
$-\dfrac{2a\lambda}{3} + b = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} t g(t)\,\mathrm{d}t$.
Système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, qui est de Cramer pour : $\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\dfrac{2\lambda}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \dfrac{4\lambda^2}{3} \neq 0$.
On a bien une solution unique sauf pour $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Pour $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, les 2 équations sont : $a - \sqrt{3}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}a + b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} t g(t)\,\mathrm{d}t$.
Il n'y a de solutions que si ces 2 équations sont proportionnelles, c'est à dire si et seulement si : $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = -\sqrt{3} \int_{-1}^{1} t g(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il n'y a plus de signe - dans le système et la condition nécessaire et suffisante pour avoir des solutions est : $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3} \int_{-1}^{1} t g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Elémentairement : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0$.

4. Par ailleurs, pour des questions de parité, $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\left(1 - 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0$, ce qui fait que g définie par $g(t) = 1 - 3t^2$ vérifie la condition de la question précédente pour λ_1 comme pour λ_2 et donc convient comme fonction g_1 et aussi comme fonction g_2.

5. Cas où g est nulle.

5.1. Rappelons que pour $\lambda \neq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_2$, la solution est unique. Par ailleurs, le système dans le cas où g est nulle est homogène, donc la solution unique de (E_λ) est la fonction nulle.

5.2. Les solutions de $\left(E_{\lambda_1}\right)$ vérifient alors simplement : $a - \sqrt{3}b = 0$, donc f est définie par : $f_1(x) = \left(\sqrt{3}\,x + 1\right) b$, avec b quelconque.
Celles de (E_{λ_2}) vérifient $a + \sqrt{3}b = 0$ et sont de la forme : $f_2(x) = \left(-\sqrt{3}\,x + 1\right) b$, avec b quelconque.

5.3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_1(t)\, f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} b^2 \left(1 - 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0$.

Partie III

1. On calcule :

$$K(\lambda h_1 + \mu h_2)(x) = \int_{-1}^{1} k(x,t)(\lambda h_1 + \mu h_2)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} k(x,t)h_1(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} k(x,t)h_2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lambda K h_1(x) + \mu K h_2(x).$$

K est bien linéaire.

Pour la continuité de Kh, on a une intégrale simple à paramètre :

$(x,t) \to k(x,t)\,h(t)$ est clairement continue sur $\mathbb{R} \times [-1,1]$, donc Kh est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (E) peut donc s'écrire : $f(x) - Kf(x) = g(x)$, ou encore : $f - Kf = g$.

3. $$g + \sum_{n\geqslant 1} K^n g - \left(Kg + \sum_{n\geqslant 1} K^{n+1} g\right) = g + \sum_{n\geqslant 1} K^n g - \left(Kg + \sum_{n\geqslant 2} K^n g\right) = g + \sum_{n\geqslant 1} K^n g - \left(\sum_{n\geqslant 1} K^n g\right) = g$$

Ceci prouve que $f = g + \sum_{n\geqslant 1} K^n g$ est bien solution de (E).

4. Un cas particulier.

4.1. On a donc ici : $Kg(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x+t)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$

et : $K^2 g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x+t)\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}g(x)$, ou encore $K^2 g = \dfrac{1}{3}g$.

4.2. Par récurrence immédiate, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $K^{2p} g = \left(\dfrac{1}{3}\right)^p g$.

Et pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $K^{2p+1} g = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{p+1}$.

5. On a alors, en admettant le résultat formel donné,

$$f(x) = x + \sum_{p\geqslant 0} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} + \sum_{p\geqslant 1} \left(\frac{1}{3}\right)^p x = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

On retrouve bien le résultat de la question 2 (et non pas 3) de la partie I.

Partie IV

1. On a $K\varphi_1(x) = \displaystyle\int_\Delta (a(x)b(t) + a(t)b(x))(a(t) + b(t))\,\mathrm{d}t$

$$= a(x)\int_\Delta a(t)b(t)\,\mathrm{d}t + a(x)\int_\Delta b^2(t)\,\mathrm{d}t + b(x)\int_\Delta a^2(t)\,\mathrm{d}t + b(x)\int_\Delta a(t)b(t)\,\mathrm{d}t = a(x) + b(x) = \varphi_1(x),$$

en applicant les normes de a et b et leur orthogonalité.

C'est à dire : $K\varphi_1 = \varphi_1$.

De même : $K\varphi_2(x) = \displaystyle\int_\Delta (a(x)b(t) + a(t)b(x))(a(t) - b(t))\,\mathrm{d}t$

$$= a(x)\int_\Delta a(t)b(t)\,\mathrm{d}t - a(x)\int_\Delta b^2(t)\,\mathrm{d}t + b(x)\int_\Delta a^2(t)\,\mathrm{d}t - b(x)\int_\Delta a(t)b(t)\,\mathrm{d}t = -a(x) + b(x) = -\varphi_2(x),$$

en applicant les normes de a et b et leur orthogonalité.

C'est à dire : $K\varphi_2 = -\varphi_2$.

φ_1 et φ_2 sont donc propres de K pour les valeurs propres 1 et -1 respectivement.

2. Soit : $f - \lambda Kf = g$ avec $\lambda \neq 0$.

2.1. Notons que si $\lambda \neq \pm 1$, alors, $\dfrac{1}{\lambda} \neq \pm 1$, et n'est donc pas valeur propre.

On a $f - \lambda Kf = g$ et $f_0 - \lambda K f_0 = g$, par différence, il vient : $(f - f_0) - \lambda K(f - f_0) = 0$,

c'est à dire : $K(f - f_0) = \dfrac{1}{\lambda}(f - f_0)$.

On en conclut que $f - f_0 = 0$, car ce vecteur ne peut être propre puisque $\dfrac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre.

C'est à dire : $f = f_0$, la solution est unique.

2.2. Si $\lambda = 1$, alors, $f - f_0$ est propre pour la valeur propre 1 et est donc colinéaire à $a + b$.
L'ensemble des solutions est donc : $f_0 + \mathbb{R}(a + b)$.
De même, pour $\lambda = -1$, l'ensemble des solutions est : $f_0 + \mathbb{R}(a - b)$.

3. $Kh(x) = \displaystyle\int_\Delta (a(x)b(t) + a(t)b(x))\, h(t)\,\mathrm{d}t = a(x)\int_\Delta b(t)h(t)\,\mathrm{d}t + b(x)\int_\Delta a(t)h(t)\,\mathrm{d}t$, en utilisant les propriétés de a et b.

Comme $a = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et $b = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$, on obtient :

$$Kh = \frac{\displaystyle\int_\Delta b(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta a(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 + \frac{\displaystyle\int_\Delta b(t)h(t)\,\mathrm{d}t - \int_\Delta a(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2$$

$$= \frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_1(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 - \frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_2(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2$$

4. Comme φ_1 et φ_2 sont propres pour 1 et -1, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$K^n h = \frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_1(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 + (-1)^n\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_2(t)h(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2$$

5. $$f = g + \sum_{n\geqslant 1}\lambda^n K^n g = g + \sum_{n\geqslant 1}\lambda^n\left(\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 + (-1)^n\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2\right)$$

$$= g + \sum_{n\geqslant 1}\lambda^n\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 + \sum_{n\geqslant 1}(-\lambda)^n\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2$$

$$= g + \frac{\lambda}{1-\lambda}\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\frac{\displaystyle\int_\Delta \varphi_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{2}\,\varphi_2$$

6. Si g est orthogonal à φ_1 et φ_2, alors : $f = g$.

7. Un cas particulier.

7.1. $k(x,t) = \dfrac{\sin x\cos t + \cos x\sin t}{\pi}$ d'où : $a(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$ et $b(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$.

On vérifie facilement : $\|a\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2(t)}{\pi}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(t)}{\pi}\,\mathrm{d}t = 1$,

et aussi : $\|b\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{b^2(t)}{\pi}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2(t)}{\pi}\,\mathrm{d}t = 1$.

On vérifie enfin : $\langle a, b\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(t)\cos(t)}{\pi}\,\mathrm{d}t = 0$.

k vérifie bien les hypothèses demandées.

7.2. Calculons d'abord $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}2\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

et aussi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}2\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Ceci assure l'orthogonalité de g avec a et b, et donc avec φ_1 et φ_2.

7.3. $f - \dfrac{1}{2}Kf = g$ a donc pour unique solution : $f = g$.

$f - Kf = g$ a pour solution, selon la question 2.2, $f = f_0 + \mathbb{R}(a + b)$, avec comme solution évidente : $f_0 = g$, car $Kg = 0$.

Les solutions sont donc définies par : $f(x) = \sin 2x + A\,(\sin x + \cos x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.