A Première partie

On ne le rappelera pas mais on ne cherche que les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

A.1.) Si f est nulle et si $\alpha = 0$, l'équation différentielle devient : $y'' = 0$.
Ceci donne : $y(x) = a\,x + b$, mais $y(0) = 0$, donc $b = 0$ et $y(\pi) = 0$ qui donne $a = 0$.
$\mathcal{S}_0$ ne contient donc que la fonction nulle.

A.2.) Dans cette question, f est nulle.

A.2.a.) Si $\alpha = \omega^2$, les solutions sont de la forme : $y(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x$, qui vérifient bien sûr les conditions données.

- Si $\omega \in \mathbb{N}^*$, $y(0) = y(\pi) = 0$ donne $B = 0$ et donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(x \mapsto \sin \omega x)$ qui convient.
- Si $\omega \notin \mathbb{N}^*$ $y(0) = y(\pi) = 0$ donne $A = B = 0$ et donc $\mathcal{S}_0$ ne contient donc que la fonction nulle.

A.2.b.) Si $\alpha = -\omega^2$, les solutions sont de la forme : $y(x) = A \operatorname{sh} \omega x + B \operatorname{ch} \omega x$.
$y(0) = y(\pi) = 0$ donne $B = 0$ puis $A = 0$ et donc $\mathcal{S}_0$ ne contient donc que la fonction nulle.

A.3.) Ici, $\alpha = 0$.

A.3.a.) Si $f(x) = \cos nx$, l'équation devient : $y'' = \cos nx$,
dont les solutions sont : $y(x) = -\dfrac{1}{n^2} \cos nx + a\,x + b$.
$y(0) = 0$ donne $b = \dfrac{1}{n^2}$, et $y(\pi) = 0$ donne facilement $a = \dfrac{(-1)^n - 1}{\pi\, n^2}$.
On a donc une solution unique : $\mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto -\dfrac{1}{n^2} \cos nx + \dfrac{(-1)^n - 1}{\pi\, n^2}\, x + \dfrac{1}{n^2} \right\}$ qui convient.

A.3.b.) Si $f(x) = \sin nx$, l'équation devient : $y'' = \sin nx$,
dont les solutions sont : $y(x) = -\dfrac{1}{n^2} \sin nx + a\,x + b$.
$y(0) = 0$ donne $b = 0$, et $y(\pi) = 0$ donne $a = 0$.
On a donc une solution unique : $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto -\dfrac{1}{n^2} \sin nx\}$ qui convient aussi dans ce cas.

A.4.) Ici, $\alpha = 0$.

A.4.a.) La solution générale de l'équation homogène associée est bien : $x \mapsto a\,x + b$.
Il suffit d'avoir une soltion particulière de (E_0).
Vérifions que $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$ convient.
On calcule $F'(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F''(x) = f(x)$.
On a donc bien : $\mathcal{S} = \left\{ F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u + a\,x + b \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ qui vérifie l'équation différentielle et les conditions posées.

A.4.b.) $F(0) = 0$ donne $b = 0$.
$F(\pi) = 0$ donne $a = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$.
Finalement, il y a bien une solution unique F_1 donnée par :
$F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u - \left(\dfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u \right) x.$

A.5.) On étudie maintenant l'application φ.

A.5.a.) Tout d'abord, si f est continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de F_1 qui est même de classe $\mathcal{C}^2$ comme solution de (E_0).
Il reste à montrer que φ est linéaire. Cela va en fait reposer sur la linéarité de l'intégration.
Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda f+\mu g)(x) = \int_0^x \left(\int_0^u (\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u - \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^u (\lambda f+\mu g)(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right)x$$
$$= \lambda\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u + \mu\int_0^x \left(\int_0^u g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u - \lambda\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right)x$$
$$-\mu\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^u g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right)x$$
$$= \Big(\lambda\,\varphi(f)+\mu\,\varphi(g)\Big)(x).$$

φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

A.5.b.) Pour l'injectivité, on cherche le noyau de φ.
Mais, si $\varphi(f)$ est nulle, sa dérivée seconde l'est aussi, et donc, f est nulle, φ est bien injective.
Par contre, φ n'est pas surjective car $\varphi(f)$ est toujours de classe $\mathcal{C}^2$ au moins...

A.5.c.) On est en dimension infinie, et on cherche les éléments propres de φ par $\varphi(f) = \lambda f$.
On sait déjà que $\lambda \neq 0$ car ϕ est injective, 0 n'est pas valeur propre.
En dérivant deux fois $\varphi(f) = \lambda f$, on obtient : $f = \lambda f''$, qu'on réecrit $f'' - \dfrac{1}{\lambda}f = 0$.
De plus, f doit vérifier $f(0) = f(\pi) = 0$. On se retrouve dans la question A.2, avec $\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}$.

- Si $\lambda < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-\dfrac{1}{\lambda}}$, d'où : $f(x) = K\sin\omega x$ si $\omega \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = 0$ sinon.
- Si $\lambda > 0$, on pose $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda}}$, d'où : f est nulle.

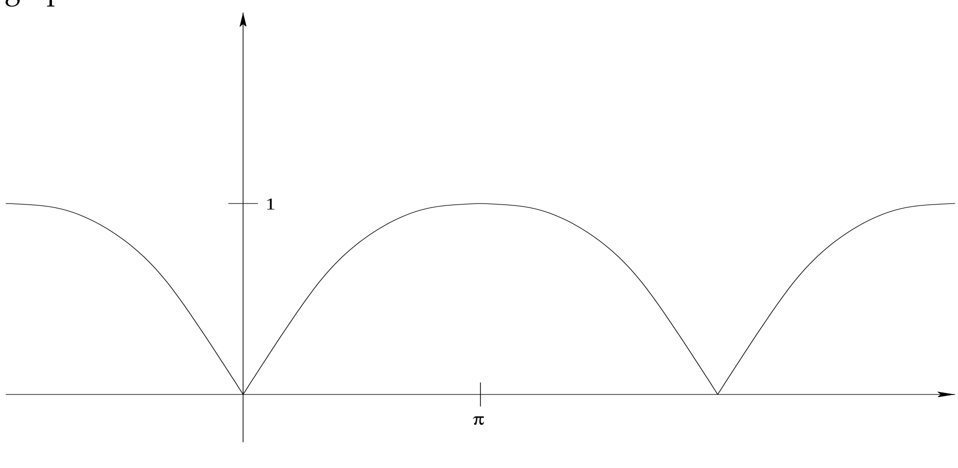
Finalement, les seules valeurs propres sont de la forme $-\dfrac{1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, les sous-espaces propres associés étant $\mathrm{Vect}(x \mapsto \sin nx)$, la réciproque n'étant qu'une vérification élémentaire.

B Deuxième partie

B.1.) Développement de p en série de Fourier.

B.1.a.) p est clairement paire, 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux car sur les intervalles $[2k\pi,2(k+1)\pi]$, sa restriction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^1$. $(k \in \mathbb{Z})$

B.1.b.) L'étude sur $[0,2\pi]$ est évidente, la périodicité donne le reste. On se contente donc de tracer le graphe sans faire de tableau de variation.



On a ici divisé l'échelle par 2 par papport à ce qui est demandé. Les dimensions peuvent être légèrement différentes selon votre imprimante ou son driver. Par ailleurs, si le graphe s'imprime mal, essayez « gsview ».

B.1.c.) p est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc, par application du théorème de Dirichlet, la série de Fourier de p converge et est de somme p.

B.1.d.) Compte tenu que p est paire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0$.
On tient ensuite compte de la parité et de la périodicité pour le calcul des a_n.
$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} p(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\left[-2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$
On travaille maintenant pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(-n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) + \frac{-1}{-n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(-n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{4n^2-1}.$$

Ce qui nous donne bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{4n^2-1}$.

B.2.) Utilisation de la formule de Parseval

B.2.a.) La fonction g étant réelle, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, elle vérifie la formule de Parseval :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g^2(x)\mathrm{d}x = a_0(g)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(g)^2 + b_n(g)^2\Big).$$

B.2.b.) La fonction p vérifie ces mêmes hypothèses et :
$$\int_0^{2\pi} p^2(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1-\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x-\sin(x)\Big]_0^{2\pi} = \pi$$
On obtient donc : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$.

On multiplie cette égalité par $\dfrac{\pi}{2}$ et on obtient : $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

C Troisième partie

C.1.) Cette équation différentielle est linéaire, du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. L'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ est engendré par sin et cos.
Ce qui donne : $\mathcal{S} = \Big\{x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)\,\Big|\,a,b \in \mathbb{R}\Big\}$.

C.2.) Une solution particulière de (E_1).

C.2.a.) $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)\mathrm{d}t$
$= \sin x\displaystyle\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$, par simple linéarité des intégrales.
Ceci est vrai pour tout x réel, en particulier $\forall x \in [0,\pi]$.

C.2.b.) f est continue et donc h est de classe $\mathcal{C}^1$. La dernière formule permet de dériver h de façon élémentaire.
$$h'(x) = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\, f(x)\cos x + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \cos x\, f(x)\sin x$$
$$= \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière formule, toujours en utilisant la continuité de f nous donne la classe $\mathcal{C}^1$ de h', et donc la classe $\mathcal{C}^2$ de h. On dérive donc de nouveau :
$h''(x) = -\sin x \int_0^x f(t)\cos t \,\mathrm{d}t + f(x)\cos^2 x + \cos x \int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + f(x)\sin^2 x$
Et finalement : $h''(x) = -h(x) + f(x)$.

C.2.c.) $h'' - h = f$, et donc : h est bien une solution particulière de (E_1) !

C.3.) La solution générale de (E_1) est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Ce qui donne : $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

C.4.) Résolution avec $h(x) = |\sin x|$.

C.4.a.) En écrivant $p(2x)$ à partir du développement en série de Fourier de p, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

C.4.b.) On calcule l'intégrale demandée :

$$\int_0^x \cos 2nt \sin(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \sin(x-t+2nt) + \sin(x-t-2nt)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x \sin(x+(2n-1)t) + \sin(x-(2n+1)t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(x+(2n-1)t)}{2n-1} + \frac{\cos(x-(2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2nx}{2n-1} + \frac{\cos x}{2n-1} + \frac{\cos 2nx}{2n+1} - \frac{\cos x}{2n+1}\right) = -\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + \frac{\cos x}{4n^2-1}$$
$$= \frac{\cos x - \cos 2nx}{4n^2-1}.$$

Ceci est bien entendu valable $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

C.4.c.) On reprend la formule de définition de h :

$$h(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x |\sin t|\sin(x-t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}\right)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

On permute ici « librement » la série et l'intégrale :

$$h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\sin(x-t)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}(1-\cos x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx - \cos x}{(4n^2-1)^2}.$$

Egalité vraie, bien entendu, $\forall x \in \mathbb{R}$.

C.4.d.) On avait : $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

En multipliant par $-\cos x$, on obtient : $-\dfrac{2}{\pi}\cos x + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-\cos x}{(4n^2-1)^2} = -\dfrac{\pi}{4}\cos x$.

Ce qui donne : $h(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{\pi}{4}\cos x + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2nx}{(4n^2-1)^2}$.

Egalité vraie, bien entendu, $\forall x \in \mathbb{R}$.

C.4.e.) Pour $h(0)$ et $h(\pi)$, le plus simple est de repredre la formule du départ :

$$h(0) = \int_0^0 |\sin t|\sin(-t)\mathrm{d}t = 0.$$
$$h(\pi) = \int_0^\pi |\sin t|\sin(\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

C.4.f.) $\mathcal{S}$ a déjà été déterminé : $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + h(x) \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$.
Pour $\mathcal{S}_0$, on annule la valeur en 0 et en π. Ce qui donne :
$0 = a + h(0) = a$ et,
$0 = -a + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui est impossible.
On en déduit que $\mathcal{S}_0$ est vide.

D Quatrième partie

Cette équation différentielle est linéaire du second ordre sans second membre. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel de dimension deux.

D.1.) Pour $x > 0$, on pose : $y(x) = z(\ln x)$.
On calcule : $y'(x) = \dfrac{1}{x} z'(\ln x)$, et : $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2} z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2} z''(\ln x)$.

D.2.) On remplace dans l'équation différentielle (F),
ce qui donne : $-z'(\ln x) + z''(\ln x) + z'(\ln x) + z(\ln x) = 0$.
Ou encore : $z''(\ln x) + z(\ln x) = 0$.
Et donc : y solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow z$ est solution de $z'' + z = 0$ sur $\mathbb{R}$.

D.3.) On a donc : $z(t) = a\cos t + b\sin t$, qui fournit :
$y(x) = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ comme solution générale de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

D.4.) Compte tenu des conditions initiales, l'équation différentielle a une solution unique sur $\mathbb{R}_+^*$.
$y(1) = 0$ donne $a = 0$.
Alors, $y'(x) = \dfrac{b}{x}\cos(\ln x)$ et : $y'(1) = 1$ donne : $b = 1$.
La solution unique cherchée est donc $x \mapsto \sin(\ln x)$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.