Les calculatrices sont autorisées.
****

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Objet : La transformation de Fourier est un outil employé en sciences de l'ingénieur. En plus d'être linéaire, elle vérifie de nombreuses propriétés. Nous nous proposons d'en établir quelques-unes en nous limitant à un espace vectoriel particulier.

I. - Préliminaires

On note $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions définies, continues, infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions f de la forme $f(t) = \mathrm{P}(t)\ \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes.

Pour tout n entier naturel, on note $\mathcal{P}_n$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ des fonctions f de la forme $f(t) = \mathrm{P}(t)\,\mathrm{e}^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

I-1) Quelques endomorphismes qui nous seront utiles

Soient T, D, S trois applications qui, à une fonction f de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ associent respectivement les fonctions suivantes :

$$\mathrm{T}(f) = g \text{ avec pour tout } t \text{ réel } g(t) = t\,f(t)$$
$$\mathrm{D}(f) = f'$$
$$\mathrm{S}(f) = h \text{ avec pour tout } t \text{ réel } h(t) = f(-t)$$

Montrer que les applications T, D, S définissent chacune un endomorphisme de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Montrer que S est un automorphisme. Donner S^{-1}.

I-2) Étude des intégrales utilisées

a) Justifier l'existence de $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

De nombreuses méthodes permettent d'obtenir $J = \sqrt{\pi}$. On l'admettra.

En déduire la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt$.

b) Pour toute fonction f de $\mathcal{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

c) Pour tout u réel, pour toute fonction f de $\mathcal{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut}\,dt$.

I-3) Définition de la transformation de Fourier (notée ϕ ici)

Soit ϕ l'application qui, à tout f de $\mathcal{P}$ associe si elle existe la fonction $\phi(f) = \psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } u \text{ réel} \qquad \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut}\,dt.$$

Vérifier que ϕ est bien définie sur $\mathcal{P}$, puis montrer que ϕ est une application linéaire.

<u>II. – Deux formules pour l'application linéaire ϕ</u>

On conservera par la suite les notations suivantes :

f un élément de $\mathcal{P}$, défini par : $f(t) = P(t)\,e^{-\pi t^2}$ pour tout t réel.

Son image par ϕ : $\psi = \phi(f)$ définie par : $\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut}\,dt$ pour tout u réel.

II-1) Première formule

Justifier la dérivabilité de ψ, calculer $\psi'(u)$ et montrer que dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\psi' = -2\,i\pi\,\phi(g) \qquad \text{avec } g(t) = t\,f(t)$$

que l'on peut écrire de façon plus formelle

$$D \circ \phi = -2\,i\,\pi(\phi \circ T) \quad \text{formule que l'on notera (1)}$$

En remarquant que ψ' est l'image d'une fonction de $\mathcal{P}$, en déduire que ψ est infiniment dérivable et est donc un élément de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

II-2) Deuxième formule

Par une intégration par parties, montrer que dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\phi(f') = \psi_1 \qquad \text{avec } \psi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-2i\pi ut}\,dt = 2i\pi u\,\psi(u)$$

que l'on peut écrire de façon plus formelle :

$$\phi \circ D = 2\,i\,\pi(T \circ \phi) \quad \text{formule que l'on notera (2)}$$

III. – ϕ est un endomorphisme

III-1) Pour tout k entier naturel, on note b_k la fonction qui à tout t réel associe $b_k(t) = t^k \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.
Pour tout n entier naturel, on considère la famille $(b_k)_{0\leq k\leq n}$, justifier que celle-ci constitue une base de $\mathcal{P}_n$. On pose $\phi(b_k) = B_k$.

III-2) Donner l'ensemble $\mathcal{SG}$ des solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(t) + 2\pi t f(t) = 0$ si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1.

III-3) Vérifier que b_0 est un élément de $\mathcal{SG}$, noter la relation différentielle qui en découle en utilisant les endomorphismes D et T, en déduire une relation différentielle vérifiée par B_0, puis montrer l'existence d'une constante complexe λ telle que, pour tout u réel, $B_0(u) = \lambda\ \mathrm{e}^{-\pi u^2}$.
Exprimer $B_0(0)$ sous forme d'une intégrale et en déduire la valeur de λ.

III-4) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = \mathrm{T}(b_{k-1})$. Calculer B_1, B_2, B_3, puis montrer par récurrence que $B_k = \phi(b_k)$ est un élément de $\mathcal{P}_k$. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, si f est un élément de $\mathcal{P}_n$, il en est de même de $\phi(f)$. Montrer alors que ϕ définit un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

IV. – Étude en dimension 4

Soit n un entier naturel.

On note S_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ tel que $S_n(f) = S(f)$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ tel que $\phi_n(f) = \phi(f)$.

IV-1) Ecrire les matrices de ϕ_3 et S_3 dans la base (b_0, b_1, b_2, b_3) de $\mathcal{P}_3$.

IV-2) Expliciter $\phi_3 \circ \phi_3$ en fonction de S_3. En déduire que ϕ_3 est inversible et déterminer son inverse.

V. – ϕ est bijectif. Quel est son inverse ?

Pour tout endomorphisme A, on note $A^2 = A \circ A$, et pour tout m entier naturel non nul $A^m = A \circ A^{m-1} = A^{m-1} \circ A$ avec la convention $A^0 = \mathrm{I}$ qui représente l'application identité sur $\mathcal{P}$.

Pour tout j entier naturel, on note $b_0^{(j)}$ la $j^{\text{ième}}$ dérivée de b_0, on a donc $b_0^{(j)} = \mathrm{D}^j(b_0)$
(on posera $b_0^{(0)} = b_0$).

V-1) Pour tout j entier naturel non nul, exprimer $\phi\,(b_0{}^{(j)})$ en fonction de b_0 et de T, puis en fonction de b_j.

V-2) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = \mathrm{T}(b_{k-1}) = \mathrm{T}^k(b_0)$; exprimer $\phi\,(b_k)$ en fonction de b_0 et de D, puis en fonction de $b_0{}^{(k)}$.

V-3) Exprimer alors $\phi^{\,2}(b_k)$. En déduire que ϕ est bijectif, justifier les deux formules suivantes :

$$\phi \circ \phi = \mathrm{S} \quad \text{et} \quad \phi^{-1} = \mathrm{S} \circ \phi = \phi \circ \mathrm{S}.$$

Cette dernière relation nous permettra par la suite de permuter S et ϕ .

V-4) Montrer que $\phi^{-1} = \phi^{\,3}$.

VI. – Valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_3

VI-1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_3 ; cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

VI-2) Déterminer une base de $\mathcal{P}_3$ formée de vecteurs propres de ϕ_3.

VI-3) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout t réel par : $f(t) = \mathrm{P}(t)\; e^{-\pi t^2}$, avec $\mathrm{P}(t) = 1 + t^2 + t^3$.
Décomposer f dans la base trouvée à la question précédente.

Fin de l'énoncé