I Préliminaires

I- 1) **Remarque 1** *Question facile à traiter avec soin, pour T, D et S.*
Il est clair que T, D et S sont de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui même.
Par ailleurs, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall f_1,f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$,
$\mathrm{T}\left(\lambda\, f_1 + \mu\, f_2\right)(t) = t\left(\lambda f_1 + \mu f_2\right)(t) = \lambda\, t f_1(t) + \mu\, t f_2(t) = \lambda\, \mathrm{T}\left(f_1\right)(t) + \mu\, \mathrm{T}\left(f_2\right)(t)$.
Ceci est valalable $\forall t \in \mathbb{R}$.
Et donc : $\mathrm{T}\left(\lambda\, f_1 + \mu\, f_2\right) = \lambda\, \mathrm{T}\left(f_1\right) + \mu\, \mathrm{T}\left(f_2\right)$.
T est bien linéaire, donc un endomorphisme.
Il en est de même aussi facilement pour D, à cause de la linéarité de la dérivation, et pour S.
Enfin, il est clair que $\mathrm{S} \circ \mathrm{S} = Id$ et que S est bijective, car $\forall h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}), \exists! f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) / \mathrm{S}(f) = h$, avec f définie par : $f(t) = h(-t)$ pout tout t.
Ce qui prouve que S est un automorphisme et que $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}$.

I- 2) **Remarque 2** *Question classique à traiter avec beaucoup de soin.*

a) $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est clairement continue, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$, par ailleurs elle est paire, il n'y a qu'un seul problème de convergence à étudier en $+\infty$.
Enfin, elle est positive, et sur $[1, +\infty[$, on a : $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$.
J est bien une intégrale convergente, par comparaison.
Pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi\, t^2} \mathrm{d}t$, on pose : $u = \sqrt{\pi}\, t$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales sont donc de même nature, ici convergentes, et on trouve : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi\, t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = 1.$

b) La continuité de la fonction f qui entraine la locale intégrabilité est une évidence sur laquelle on ne revient pas.
Les convergences en $+\infty$ et en $-\infty$ se montrent de la même façon. On le fait en $+\infty$.
P est un polynôme.
On a donc : $\displaystyle\lim_{+\infty} t^2 \times \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\pi\, t^2} = 0$, ce qui donne : $\left|\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\pi\, t^2}\right| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ce qui prouve, par comparaison, la convergence absolue de l'intégrale en $+\infty$.

c) La simple inégalité $\left|f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}\right| \leqslant |f(t)|$ prouve, par comparaison et convergence absolue, la convergence demandée.

I- 3) **Remarque 3** *L'énoncé semble ici considérer que l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$
Comme on vient de la voir, l'intégrale $\psi(u)$ converge, ψ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et ϕ est ainsi définie sur $\mathcal{P}$.
Pour la linéarité : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall f,g \in \mathcal{P}$,
$\displaystyle\phi\left(\lambda\, f + \mu\, g\right)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda\, f + \mu\, g\right)(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}\mathrm{d}t = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}\mathrm{d}t + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}\mathrm{d}t$
$= \lambda\, \phi(f)(u) + \mu\, \phi(g)(u)$
par linéarité des intégrales convergentes et définition de ϕ.
Ce qui prouve : $\phi\left(\lambda\, f + \mu\, g\right) = \lambda\, \phi(f) + \mu\, \phi(g)$ et donc la linéarité de ϕ.

II Deux formules pour l'application linéaire ϕ

II- 1) ψ est une fonction définie par une intégrale généralisée à paramètre.
$(t,u) \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$\left|f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi u t}\right| \leqslant |f(t)|$ pour tout t et u,

- avec $|f(t)|$ indépendante de u

- et $|f(t)|$ intégrable sur $]-\infty, +\infty[$.

Ce qui prouve la continuité de ψ.
On étudie maintenant la classe $\mathcal{C}^1$.

- $\dfrac{\partial\left(f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\right)}{\partial u} = -2i\pi t\, f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- $\left|-2i\pi t\, f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\right| \leqslant 2\pi\,|t\, f(t)|$ qui est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ car c'est le module d'un élément de $\mathcal{P}$, et qui, par ailleurs, ne dépend pas de u.

ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a : $\psi'(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t\, f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t = -2i\pi\,\phi(g)(u)$

Ce qui prouve bien : $\psi' = -2i\pi\,\phi(g)$.
Enfin, on a $-2i\pi\, g \in \mathcal{P}$ et on peut donc recommencer avec cette fonction ce qu'on a fait avec f, indéfiniment par une récurrence facile que l'énoncé semble nous demander d'admettre.
ψ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Enfin, en langage d'opérateurs, on note : $\mathrm{D}\circ\phi = -2i\pi\,\phi\circ\mathrm{T}$.

II- 2) $\psi_1 = \phi\left(f'\right)(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t$

On va faire une intégration par parties dans les intégrales généralisée, en posant : $U(t) = f(t)$ et $V(t) = \mathrm{e}^{-2i\pi ut}$ qui sont bien toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$.
Par ailleurs, l'intégrale de départ converge et : $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut} = 0$, des limites finies, ce qui prouve que les deux intégrales sont de même nature, donc convergentes, et, par ailleurs, que le crochet est nul, ce qui donne :

$$\psi_1(u) = \phi\left(f'\right)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t = \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\right]_{\text{lim en }-\infty}^{\text{lim en }+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(-2i\pi u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t$$

$$= 2i\pi u \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t = 2i\pi u\,\psi(u)$$

De nouveau, en langage d'opérateurs, on note : $\phi\circ\mathrm{D} = 2i\pi\,\mathrm{T}\circ\phi$.

III ϕ est un endomorphisme

Remarque 4 *On semble changer d'espace d'arrivée pour ϕ, l'énoncé est, pour le moins, imprécis.*

III- 1) On sait que $(1,t,t^2,\ldots,t^n)$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}_n[t]$, et donc, une famille libre et génératrice.
La famille $(b_0,b_1,b_2,\ldots,b_n)$ constitue donc

– une famille libre de $\mathcal{P}_n$, car les exponentielles ne s'annulent jamais, et la démonstration est la même que pour la base canonique de $\mathbb{R}_n[t]$;
– une famille génératrice de $\mathcal{P}_n$, car il suffit d'engendrer le polynôme en facteur $\mathrm{e}^{-\pi t^2}$, comme dans $\mathbb{R}_n[t]$.

III- 2) (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre. L'ensemble des solutions sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et donc aussi sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par : $t\mapsto f_1(t) = \mathrm{e}^{-\int 2\pi\, t\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\pi\, t^2}$.
Finalement : $\mathcal{SG} = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto \mathrm{e}^{-\pi\, t^2}\right) = \mathrm{Vect}\,(b_0)$

Remarque 5 *Pour toutes les questions suivantes, il est mieux d'utiliser le langage des opérateurs et d'oublier la définition de ϕ. Ce qui est plus proche d'un esprit de programme MP que de programme TSI...*

III- 3) b_0 est donc bien un élément de $\mathcal{SG}$, ce qui donne : $\mathrm{D}\,(b_0) + 2\pi\,\mathrm{T}\,(b_0) = 0$ avec : $B_0 = \phi\,(b_0)$.
Comme $\phi(0) = 0$, et que ϕ est linéaire, on obtient : $\phi\circ\mathrm{D}\,(b_0) + 2\pi\,\phi\circ\mathrm{T}\,(b_0) = 0$.

En utilisant les propriétés montrées auparavent : $2i\pi\,\mathrm{T}\circ\phi\,(b_0)+i\,\mathrm{D}\circ\phi\,(b_0)=0.$
Et enfin : $2\pi\,\mathrm{T}\,(B_0)+\mathrm{D}\,(B_0)=0.$
Ce qui signifie tout simplement que B_0 vérifie l'équation différentielle (E) !...
D'où : $B_0(u)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\pi u^2}$, mais, par ailleurs, $B_0(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}b_0(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t=1=\lambda$
La conclusion définitive de cette question est : $B_0=b_0$.

III- 4) Remarquons d'abord que : $\mathrm{D}\,(b_k)=k\,b_{k-1}-2\pi\,b_{k+1}$, pour $k\geqslant 1$, et que : $\mathrm{D}\,(b_0)=0-2\pi\,b_1$

$B_1=\phi\,(b_1)=\phi\circ\mathrm{T}\,(b_0)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\circ\phi\,(b_0)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\,(b_0)=-i\,b_1.$
Donc : $B_1=-i\,b_1$.
$B_2=\phi\,(b_2)=\phi\circ\mathrm{T}\,(b_1)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\circ\phi\,(b_1)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\,(B_1)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\,(-i\,b_1)=-\dfrac{i^2}{2\pi}\mathrm{D}\,(b_1).$
Ce qui donne : $B_2=-\dfrac{i^2}{2\pi}\,(b_0-2\pi\,b_2)=\dfrac{1}{2\pi}\,(b_0-2\pi\,b_2).$
Finalement : $B_2=\dfrac{1}{2\pi}b_0-b_2.$
$B_3=\phi\,(b_3)=\phi\circ\mathrm{T}\,(b_2)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\circ\phi\,(b_2)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\,(B_2)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2\pi}\,(b_0-2\pi\,b_2)\right)$
$=\dfrac{i}{(2\pi)^2}\mathrm{D}\,(b_0-2\pi\,b_2)=\dfrac{i}{(2\pi)^2}\,(-2\pi\,b_1-2\pi\,(2\,b_1-2\pi\,b_3)).$
Finalement : $B_3=\dfrac{-3}{2\pi}i\,b_1+i\,b_3.$
On montre maintenant par récurrence que : $B_k\in\mathcal{P}_k$. L'amorce est claire, on l'a faite sur 4 rangs !
On l'admet au rang k, on le montre au rang $k+1$.
$B_{k+1}=\phi\,(b_{k+1})=\phi\circ\mathrm{T}\,(b_k)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\circ\phi\,(b_k)=\dfrac{i}{2\pi}\mathrm{D}\,(B_k).$
Mais, $B_k\in\mathrm{Vect}\,(b_0,b_1,\ldots,b_k)$, et donc : $\mathrm{D}\,(B_k)\in\mathrm{Vect}\,(b_0,b_1,\ldots,b_k,b_{k+1})$, compte tenu de la linéarité de D et de la remarque initiale faite.
Ce qui prouve bien que : $B_{k+1}\in\mathcal{P}_{k+1}$.
Ceci prouve, compte tenu de la linéarité de ϕ, que : $\phi\,(\mathcal{P}_n)\subset\mathcal{P}_n$.
Enfin, ϕ est bien un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$.

IV Etude en dimension 4

IV- 1) On travaille dans la base (b_0,b_1,b_2,b_3) de $\mathcal{P}_3$.

La matrice de ϕ_3 découle directement de la partie précédente : $\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2\pi}&0\\0&-i&0&\frac{-3i}{2\pi}\\0&0&-1&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}$.

Par ailleurs : $\mathrm{S}\,(b_k)=(-1)^k\,b_k$, par un calcul élémentaire.

La matrice de S_3 en découle également immédiatement : $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

IV- 2) Le déterminant de ϕ_3 est facile à obtenir par sa matrice qui est triangulaire, et vaut : $1\times -i\times -1\times i=-1\neq 0$.
ϕ_3 est donc bien inversible.

Par ailleurs, $\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2\pi}&0\\0&-i&0&\frac{-3i}{2\pi}\\0&0&-1&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2\pi}&0\\0&-i&0&\frac{-3i}{2\pi}\\0&0&-1&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

Ce qui prouve que $\phi_3 \circ \phi_3 = \mathrm{S}_3$.
Et enfin, compte tenu de $\mathrm{S}_3^{-1} = \mathrm{S}_3$ et de l'inversibilité de ϕ_3 : $\phi_3^{-1} = \phi_3 \circ \mathrm{S}_3$.

V ϕ est bijectif. Quel est son inverse ?

V- 1) $\phi\left(b_0^{(j)}\right) = \phi \circ \mathrm{D}\left(b_0^{(j-1)}\right) = 2i\pi\, \mathrm{T} \circ \phi\left(b_0^{(j-1)}\right)$
$= 2i\pi\, \mathrm{T} \circ \phi \circ \mathrm{D}\left(b_0^{(j-2)}\right) = (2i\pi)^2\, \mathrm{T}^2 \circ \phi\left(b_0^{(j-2)}\right) = \cdots = (2i\pi)^j\, \mathrm{T}^j \circ \phi\,(b_0)$
$= (2i\pi)^j\, \mathrm{T}^j\,(b_0) = (2i\pi)^j\, b_j$.
En un mot : $\phi\left(b_0^{(j)}\right) = (2i\pi)^j\, b_j$, pour $j \in \mathbb{N}^*$.
Les points de suspension correspondent à une récurrence facile que l'on n'écrit pas.
L'amorce, pour $j = 1$ est facile : $\phi\,(b_0') = \phi \circ \mathrm{D}\,(b_0) = -2\pi\, \phi\,(b_1) = (-2\pi)\,(-ib_1) = 2i\pi\, b_1$.

V- 2) $\phi\,(b_k) = \phi \circ \mathrm{T}\,(b_{k-1}) = \dfrac{i}{2\pi}\, \mathrm{D} \circ \phi\,(b_{k-1})$
$= \dfrac{i}{2\pi}\, \mathrm{D} \circ \phi \circ \mathrm{T}\,(b_{k-2}) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^2 \mathrm{D}^2 \circ \phi\,(b_{k-2}) = \cdots = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{D}^k \circ \phi\,(b_0)$
$= \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k \mathrm{D}^k\,(b_0) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)}$
En un mot : $\phi\,(b_k) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Les points de suspension correspondent encore une fois par une récurrence facile à écrire.
L'amorce, pour $k = 1$ est facile : $\phi\,(b_1) = -i\, b_1 = (-i) \times \left(-\dfrac{1}{2\pi}\right) b_0' = \dfrac{i}{2\pi}\, b_0'$

V- 3) $\phi^2\,(b_k) = \phi\left(\left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)}\right) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k \phi\left(b_0^{(k)}\right) = \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^k (2i\pi)^k\, b_k = (-1)^k\, b_k = \mathrm{S}\,(b_k)$
On remarque que ceci est encore vrai pour $k = 0$, car $\phi\,(b_0) = b_0$ et $\mathrm{S}\,(b_0) = b_0$.
On remarquera bien ici qu'on est en dimension infinie...
La famille des b_k formant une famille génératrice de $\mathcal{P}$, on a l'égalité : $\phi \circ \phi = \mathrm{S}$.
Comme S est clairement bijective,

- elle est surjective et donc ϕ est surjective car $g \circ f$ surjective implique g surjective ;
- elle est injective et donc ϕ est injective car $g \circ f$ injective implique f injective.

ϕ est donc bijective.
En inversant $\phi \circ \phi = \mathrm{S}$, compte tenu de $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}$, on obtient : $\phi^{-1} \circ \phi^{-1} = \mathrm{S}$.
On compose à gauche d'une part, et à droite d'autre part, par ϕ.
On obtient : $\phi^{-1} = \phi \circ \mathrm{S} = \mathrm{S} \circ \phi$.

V- 4) La relation $\mathrm{S}^2 = \mathrm{Id}$ nous donne : $\phi^4 = \mathrm{Id}$ et donc enfin : $\phi^{-1} = \phi^3$.

VI Valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_3

Remarque 6 *Question classique et facile à condition d'avoir la matrice de ϕ_3...*

VI- 1) La matrice de ϕ_3 est triangulaire, ses valeurs propres se trouvent donc sur la diagonale, on a donc $1, -i, -1, i$, toutes simples.
Il nous suffit d'un vecteur propre pour chaque valeur propre.
ϕ_3 est bien diagonalisable.

- b_0 est propre pour la valeur propre 1 ;
- b_1 est propre pour la valeur propre $-i$;

– Pour la valeur propre -1, on résout le système : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On trouve bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par : $\begin{pmatrix} 1/4\pi \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$b_2 + \dfrac{1}{4\pi}\, b_0$ est propre pour la valeur propre -1 ;

– Pour la valeur propre i, on résout le système : $\begin{pmatrix} 1-i & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & -2i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On trouve bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par : $\begin{pmatrix} 0 \\ -3/4\pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$b_3 - \dfrac{3}{4\pi}\, b_1$ est propre pour la valeur propre i.

VI- 2) Le problème est donc de décomposer $b_0 + b_2 + b_3$ dans la base de vecteurs propres.

$$b_0 + b_2 + b_3 = b_0 + b_2 + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi}\, b_1\right) + \frac{3}{4\pi}\, b_1 = b_0 + \frac{3}{4\pi}\, b_1 + b_2 + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi}\, b_1\right)$$
$$= b_0 + \frac{3}{4\pi}\, b_1 + \left(b_2 + \frac{1}{4\pi}\, b_0\right) + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi}\, b_1\right) - \frac{1}{4\pi}\, b_0$$
$$= \left(1 - \frac{1}{4\pi}\right) b_0 + \frac{3}{4\pi}\, b_1 + \left(b_2 + \frac{1}{4\pi}\, b_0\right) + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi}\, b_1\right).$$

Remarque 7 *Sauf erreur de calcul de ma part dans ces deux dernières questions...*