I Etude de $\mathcal{A}$

1. $\chi_F(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{vmatrix} = 1 - t^3 = (1-t)(j-t)(j^2-t)$,

F a donc 3 valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

2. **a**/ $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(I, F, F^2\right)$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3\mathbb{R}$.

$\left(I, F, F^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}$, montrons qu'elle est libre.

$xI + yF + zF^2 = 0$ donne $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc : $x = y = z = 0$.

$\mathcal{A}$ est donc de dimension 3 et admet $\left(I, F, F^2\right)$ comme base.

b/ Remarquons que $F^3 = I$ et calculons :

$\left(xI + yF + zF^2\right)\left(x'I + y'F + z'F^2\right)$

$= (xx' + yz' + zy')\, I + (xy' + yx' + zz')\, F + (xy' + yy' + zx')\, F^2$

$= (x'x + y'z + z'y)\, I + (x'y + y'x + z'z)\, F + (x'z + y'y + z'x)\, F^2$

$= \left(x'I + y'F + z'F^2\right)\left(xI + yF + zF^2\right)$

Le produit de 2 éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$ et le produit dans $\mathcal{A}$ est commutatif.

On pourrait d'ailleurs montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des matrices carrées.

3. Soit (λ, u) un couple valeur propre, vecteur propre de F. u est aussi propre pour I pour la valeur propre 1 et propre pour F^2 pour la valeur propre λ^2.

Donc : $\left(xI + yF + zF^2\right) u = \left(x + y\lambda F + z\lambda F^2\right) u$,

ce qui signifie que u est propre pour $\left(xI + yF + zF^2\right)$ et pour la valeur propre : $x + y\lambda + z\lambda^2$.

Une base de vecteurs propres de F diagonalise $\left(xI + yF + zF^2\right)$ et diagonalise donc tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Les valeurs propres de F, distinctes ou confondues, sont donc : $x+y+z$, $x+yj+zj^2$, et $x+yj^2+zj$.

4. Le déterminant de A est donc le produit de ces valeurs propres :

$\det A = (x+y+z)\left(x+yj+zj^2\right)\left(x+yj^2+zj\right)$.

Et enfin, A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul,

c'est à dire : $(x+y+z)\left(x+yj+zj^2\right)\left(x+yj^2+zj\right) \neq 0$.

5. **a**/ On sait déjà que si $A \in \mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{A}$, alors $AM \in \mathcal{A}$.

De plus, Φ est bien linéaire : $\Phi(\lambda M + \mu P) = A(\lambda M + \mu P) = \lambda AM + \mu AP = \lambda\Phi(M) + \mu\Phi(P)$.

Φ est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

b/ Si $AM = 0$, comme A est inversible, $M = 0$, ce qui prouve que Φ est injective.

Comme on est en dimension finie, Φ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$.

Et comme $I \in \mathcal{A}$, I a un antécédant dans $\mathcal{A}$, et cet antécédant est A^{-1}, finalement : $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

c/ La méthode proposée est de prendre une matrice de $\mathcal{A}$, de calculer $B = A^{-1}$

et de calculer $B - B[1,1]I - B[1,2]F - B[1,3]F^2$, il suffit ensuite de comparer ce résultat à la matrice nulle. Tout ceci en calcul formel exact... L'énoncé ne demande qu'une méthode...

II Etude d'une surface

1. On a déjà calculé le déterminant, $\mathcal{S}$ est donc d'équation : $(x+y+z)\left(x+yj+zj^2\right)\left(x+yj^2+zj\right) = 1$, ou encore, en développant et en utilisant $1 + j + j^2 = 0$:

$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right) = (x+y+z)\,\dfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right) = 1.$

Ce qui donne : $q(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right)$.

On a facilement : $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{a}=x+y+z$ et aussi, $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}$ est de coordonnées : $\begin{pmatrix} y-z\\ z-x\\ x-y\end{pmatrix}$.

Et donc : $\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}\right\|^2=(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$.

L'équation de $\mathcal{S}$ est donc bien : $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{a}\right)\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}\right\|^2=1$.

2. En utilisant le point H défini par l'énoncé, on a : $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{a}$,
et aussi :$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}=\overrightarrow{HM}\wedge\overrightarrow{a}$, ces deux vecteurs étant orthogonaux.
Ce qui donne : $\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2$.
L'équation de $\mathcal{S}$ en utilisant H devient : $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{a}\right)\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2=1$.
Ce qui prouve que si $M\in\mathcal{S}$, tout point M' du cercle d'axe Δ passant par M est contenu dans $\mathcal{S}$ car H, le centre du cercle, est alors le même pour M et M' et $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{HM'}\right\|^2$.

3. **a/** Remarquons d'abord que $\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{3}$.
On a ensuite : $\overrightarrow{OM}=X\overrightarrow{I}+Y\overrightarrow{J}+Z\overrightarrow{K}$. et donc : $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{a}=Z\|\overrightarrow{a}\|=Z\sqrt{3}$.
D'autre part : $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}=\left(X\overrightarrow{I}+Y\overrightarrow{J}+Z\overrightarrow{K}\right)\wedge\sqrt{3}\,\overrightarrow{K}=\sqrt{3}\left(-X\overrightarrow{I}+Y\overrightarrow{J}\right)$.
D'où : $\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}\right\|^2=3\left(X^2+Y^2\right)$.
L'équation de $\mathcal{S}$ devient : $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}Z\left(X^2+Y^2\right)=1$.

b/ On obtient la méridienne du plan YOZ en faisant $X=0$ dans l'équation.
Ce qui donne : $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}ZX^2=1$. C'est une courbe de Riemann très facile à tracer, comme il est facile de la faire tourner autour de son axe, ceci est laissé au lecteur.

4. **a/** On a vu que : $\left(x''I+y''F+z''F^2\right)=\left(xI+yF+zF^2\right)\left(x'I+y'F+z'F^2\right)$
et donc : $\det\left(x''I+y''F+z''F^2\right)=\det\left(xI+yF+zF^2\right)\det\left(x'I+y'F+z'F^2\right)=1$
puisque M et M' sont dans $\mathcal{S}$. Ceci prouve qu'alors $M''\in\mathcal{S}$.
On a bien défini « $*$ » une loi de composition interne dans $\mathcal{S}$.

b/ Si $M\in\mathcal{S}$, alors $A\in\mathcal{A}$, d'où A est inversible et $A^{-1}\in\mathcal{A}$.
On a donc : $A^{-1}=x'I+y'F+z'F^2$ et $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(A)}=1$.
Ceci prouve que $M'\left(x',y',z'\right)\in\mathcal{S}$.
Enfin, $AA^{-1}=1\,I=I+0\,F+0\,F^2$, d'où $M*M'$ est le point de coordonnées $(1,0,0)$.

c/
- $*$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{S}$,
- $*$ est commutative car le produit dans $\mathcal{A}$ est commutatif :
  $\left(xI+yF+zF^2\right)\left(x'I+y'F+z'F^2\right)=\left(x'I+y'F+z'F^2\right)\left(xI+yF+zF^2\right)$.
  $M*M'$ et $M'*M$ ont les mêmes coordonnées.
- elle possède un élément neutre I_0 de coordonnées $(1,0,0)$, ceci provient de ce que I est élément neutre du produit des matrices,
- on vient de prouver au b/ que tout élément possède un symétrique,
- enfin, $*$, est associative dans $\mathcal{S}$. Ce qu'on va démontrer en utilisant l'associativité du produit matriciel et la bijection canonique entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$.
  Soient $M\left(x,y,z\right),\ M'\left(x',y',z'\right),\ M'\left(x',y',z'\right)\in\mathcal{S}$,
  $(M*M')*M''$ est associé à
  $$\left[\left(xI+yF+zF^2\right)\left(x'I+y'F+z'F^2\right)\right]\left(x''I+y''F+z''F^2\right)$$
  $$=\left(xI+yF+zF^2\right)\left[\left(x'I+y'F+z'F^2\right)\left(x''I+y''F+z''F^2\right)\right]$$
  qui est associé à $M*(M'*M'')$.

On a donc bien : $(M * M') * M'' = M * (M' * M'')$.

$(\mathcal{S}, *)$ a bien une structure de groupe commutatif.

5. **a/** $\mathcal{C}$ est une parallèle de $\mathcal{S}$, c'est donc un cercle.

Le centre est de coordonnées vérifiant aussi $x = y = z$, il est donc de coordonnées : $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Le rayon est la distance de M à Δ, c'est à dire : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}$ =, de plus, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{a} = 1$,

donc $\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a}\right\|^2 = 2$, et le rayon est : $R = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

b/ $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M \in \mathcal{S}$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{a} = 1$

$\mathcal{S}$ est déjà stable pour la loi $*$, il suffit donc de montrer que si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{a} = 1$ et $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{a} = 1$ alors : $\overrightarrow{OM''} \cdot \overrightarrow{a} = 1$.

Calculons $\overrightarrow{OM''} \cdot \overrightarrow{a} = x'' + y'' + z''$

$= xx' + yz' + zy' + xy' + yx' + zz' + xz' + yy' + zx' = (x + y + z)(x' + y' + z') = 1$.

$\mathcal{C}$ est stable pour la loi $*$.

$\mathcal{C}$ est clairement non vide, pour montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe, il suffit de vérifier que si $M \in \mathcal{C}$, son inverse aussi.

Comme $\mathcal{S}$ est un groupe, cela revient donc ici à montrer que si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{a} = 1$, on inverse M' vérifie aussi : $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{a} = 1$

On sait que les coordonnées de M et M' vérifient :

$xx' + yz' + zy' = 1$, $xy' + yx' + zz' = 0$ et $xz' + yy' + zx' = 0$

d'où : $xx' + yz' + zy' + xy' + yx' + zz' + xz' + yy' + zx' = 1$

et donc : $(x + y + z)(x' + y' + z') = 1$ et enfin : $(x' + y' + z') = 1$.

On a bien M', l'inverse de M qui vérifie $M' \in \mathcal{C}$ dès que $M \in \mathcal{C}$ et donc : $\mathcal{C}$ est un sous groupe pour la loi $*$.

III Problème d'extrémum

1. On a : $\varphi(O) = \left\|\overrightarrow{OO}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA}\right\| + \left\|\overrightarrow{OB}\right\| + \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$.

Si $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| > 3$, alors : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| + \left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{BM}\right\| + \left\|\overrightarrow{CM}\right\| > 3$, car les normes sont positives.

Notons d'abord que φ est continue.

Sur le fermé-borné tel que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \leqslant 3$, φ est donc bornée et admet un minimum qu'elle atteint, ce minimum est nécessairement inférieur ou égal à 3.

Si $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| > 3$, alors : $\varphi(M) > 3$.

La borne inférieure de la fonction à l'extérieur de la sphère de rayon 3 est donc plus grande que le minimum à l'intérieur.

φ admet donc un minimum qu'elle atteint dans la sphère de rayon 3.

2. $\varphi(x, x, x) = \sqrt{3x^2} + 3\sqrt{2x^2 + (x-1)^2} = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{3x^2 - 2x + 1} = \Phi(x)$.

Φ est continue en 0, dérivable à droite et à gauche. La dérivée de $\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ est $\dfrac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$ qui vaut -1 en 0.

La dérivée de Φ à droite en 0 est donc : $\sqrt{3} - 3 < 0$, et sa dérivée à gauche est : $-\sqrt{3} - 3 < 0$.

D'où Φ est décroissant au voisinage de 0 et O n'est pas un extrémum de φ.

Par ailleurs $\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 1 + 2\sqrt{2} > 3$.

Ni A, ni B, ni C ne sont non plus des extrémums de φ.

3. Comme O est fixe, on a $\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{O\,r(A)} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{k}$.

De même, $\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{O\,r(B)} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$.

Et enfin, $\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{O\,r(C)} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{j}$.

La matrice de $\overrightarrow{r}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ est bien F. Cette base est orthonormale et la matrice F est orthogonale. $\overrightarrow{r}$ est bien une isométrie vectorielle.

Son déterminant vaut 1, c'est une isométrie directe, une rotation vectorielle.

L'axe est dirigé par $\overrightarrow{a}$ car $\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{a}$.

L'angle θ a son cosinus donné par la trace de F, $1 + 2\cos\theta = 0$, c'est à dire : $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.

Le signe du sinus est donné, par exemple, par le signe de $\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{a}\right) = \det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{a}\right) = -1$.

D'où $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}_{[2\pi]}$.

$\overrightarrow{r}$ est la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{a}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}_{[2\pi]}$.

Et enfin, r est la rotation affine d'axe $(O, \overrightarrow{a})$, orienté par $\overrightarrow{a}$, et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}_{[2\pi]}$.

4. On a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O\,r(M)} = \overrightarrow{r(O)\,r(M)} = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OM}\right)$, et donc : $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OM}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{B'M'} = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{BM}\right)$, et donc : $\left\|\overrightarrow{AM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$

De même, $\left\|\overrightarrow{BM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{CM}\right\|$, et enfin : $\left\|\overrightarrow{CM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$

Ce qui donne : $\varphi(M') = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| + \left\|\overrightarrow{AM'}\right\| + \left\|\overrightarrow{BM'}\right\| + \left\|\overrightarrow{CM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| + \left\|\overrightarrow{BM}\right\| + \left\|\overrightarrow{CM}\right\| + \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \varphi(M)$

5. **a/** $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{OP}\right)$, ces deux vecteurs ne sont colinéaires que si $\overrightarrow{OP}$ est propre pour $\overrightarrow{r}$, c'est à dire si et seulement si P est sur la droite Δ.

Remarquons au passage que cela prouve que : $\left\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right\| < \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP'}\right\|$.

On utilise pour cela le cas d'inégalité stricte de l'inégalité triangulaire.

b/ On a $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}\right)$.

De même, $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP''}\right)$ et on a encore la propriété avec B et C.

Ce qui donne : $\varphi(Q) = \left\|\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}\right)\right\|$

$$+ \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP''}\right)\right\| + \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BP''}\right)\right\| + \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP'} + \overrightarrow{CP''}\right)\right\|.$$

D'où, par inégalité triangulaire : $\varphi(Q) \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP''}\right\|\right.$

$$\left. + \left\|\overrightarrow{AP}\right\| + \left\|\overrightarrow{AP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{AP''}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP''}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP''}\right\|\right).$$

On a même une inégalité stricte : $\varphi(Q) < \dfrac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP''}\right\|\right.$

$$\left. + \left\|\overrightarrow{AP}\right\| + \left\|\overrightarrow{AP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{AP''}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{BP''}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP'}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP''}\right\|\right).$$

On a bien : $\varphi(Q) < \dfrac{1}{3}\left(\varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P'')\right)$.

On a montré l'inégalité stricte demandée à la question suivante.

c/ On remplace maintenant, dans la dernière inégalité, les vecteurs par des vecteurs de même norme : $\varphi(Q) < \dfrac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|\right.$

$$+\left\|\overrightarrow{AP}\right\|+\left\|\overrightarrow{BP}\right\|+\left\|\overrightarrow{CP}\right\|+\left\|\overrightarrow{BP}\right\|+\left\|\overrightarrow{CP}\right\|+\left\|\overrightarrow{AP}\right\|+\left\|\overrightarrow{CP}\right\|+\left\|\overrightarrow{AP}\right\|+\left\|\overrightarrow{BP}\right\|\Big)$$

Et finalement : $\varphi(Q) < \varphi(P)$, on a ici directement montré l'inégalité stricte.

Par symétrie, $Q \in \Delta$, ce qui prouve que φ atteint donc son minimum sur Δ et pas ailleurs.

6. **a**/ Si $x < 0$, alors $\Phi(x) = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{2x^2+(x-1)^2} > 3\sqrt{2x^2+(x-1)^2} > 3\sqrt{(x-1)^2} = 3|1-x| > 3$.

On a bien : $\Phi(x) > \Phi(0)$.

b/ Pour $x \geqslant 0$, on a : $\Phi(x) = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{2x^2+(x-1)^2} = x\sqrt{3} + 3\sqrt{3x^2-2x+1}$.

Φ est donc dérivable et $\Phi'(x) = \sqrt{3} + 3\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

$\Phi'(x) = 0$ pour $3x^2-2x+1 = 3(3x-1)^2$ avec $3x-1 \leqslant 0$,

ou encore : $12x^2-8x+1 = 0$ toujours avec $3x-1 \leqslant 0$.

Il y a une solution unique $x = \dfrac{1}{6}$, l'autre solution $\dfrac{1}{2}$ ne convenant pas car alors $3x-1 > 0$.

Par ailleurs, $\Phi\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6} + 3\dfrac{\sqrt{27}}{6} = \dfrac{10\sqrt{3}}{6} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

On obtient le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Phi(x)$	3	$\searrow$	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$