I Etude de f_α

1. On a $f_{|\alpha|} = f_\alpha$ et $\alpha \neq 0$, on peut donc se limiter à $\alpha > 0$.

2. f_α est périodique de période : $T_\alpha = \dfrac{2\pi}{\alpha}$.

3. f_α est solution de : $y'' + \alpha^2 y = 0$, dont la solution générale est : $y = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$.

4. $f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha x = \dfrac{\pi}{2}_{[\pi]} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2\alpha}_{[\alpha\pi]}$.

$x \geqslant 0$ entraîne $k \geqslant 0$, et $x \leqslant \pi$ entraîne $k\dfrac{\pi}{\alpha} \leqslant \pi - \dfrac{\pi}{2\alpha}$, c'est à dire : $k \leqslant \alpha - \dfrac{1}{2}$, ou encore : $k \leqslant E + d - \dfrac{1}{2}$.

Finalement, on a : $0 \leqslant k \leqslant E + d - \dfrac{1}{2}$ et k entier,

Si $d \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, cela devient : $k \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$, on a E solutions de $f_\alpha(x) = 0$ dans $[0, \pi]$.

Si $d \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$, cela devient : $k \in \{0, 1, \ldots, E\}$, on a $E+1$ solutions de $f_\alpha(x) = 0$ dans $[0, \pi]$.

II Etude de $f_{\alpha,\beta}$

1. $f_{\alpha,\beta}$ périodique de période $T \Rightarrow f_{\alpha,\beta}(x+T) = f_{\alpha,\beta}(x)$, qu'on applique en $x = 0$.
Cela donne : $f_{\alpha,\beta}(T) = f_{\alpha,\beta}(0) = 2 \Rightarrow \cos\alpha T + \cos\beta T = 2 \Rightarrow \cos\alpha T = \cos\beta T = 1$.
D'où : $\alpha T = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et : $\beta T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
D'où : $k\alpha T = 2kp\pi = p\beta T \Rightarrow k\alpha = p\beta$, $k, p \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, si $k\alpha = p\beta$, $k, p \in \mathbb{N}^*$, $f_{\alpha,\beta}\left(x + \dfrac{2p\pi}{\alpha}\right) = \cos(\alpha x + 2p\pi) + \cos\left(x + \dfrac{2p\pi\beta}{\alpha}\right)$
$= \cos(\alpha x) + \cos(\beta x + 2k\pi) = \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) = f_{\alpha,\beta}(x)$
$\Rightarrow T = \dfrac{2p\pi}{\alpha} = \dfrac{2k\pi}{\beta}$ est une période de $f_{\alpha,\beta}$.
On a bien l'équivalence demandée.

2. Comme on vient de le voir, dans le cas qui nous intéresse : $T_{\alpha,\beta} = pT_\alpha = kT_\beta$.

3. $f_{\alpha,\beta} = f_\alpha + f_\beta$, d'où $f''_{\alpha,\beta} = -\alpha^2 f_\alpha - \beta^2 f_\beta$.
Ce qui donne : $f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2 f_{\alpha,\beta} = -\alpha^2 f_\alpha - \beta^2 f_\beta + \alpha^2 f_\alpha + \alpha^2 f_\beta = \left(\alpha^2 - \beta^2\right) f_\beta$.

4. On dérive 2 fois la relation précédente et on obtient, en utilisant une deuxième fois cette relation :
$f^{(4)}_{\alpha,\beta} + \alpha^2 f''_{\alpha,\beta} = \left(\alpha^2 - \beta^2\right) f''_\beta = -\beta^2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) f_\beta = -\beta^2 f''_{\alpha,\beta} - \alpha^2\beta^2 f_{\alpha,\beta}$
Ce qui donne : $f^{(4)}_{\alpha,\beta} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) f''_{\alpha,\beta} + \alpha^2\beta^2 f_{\alpha,\beta} = 0 \qquad (E)$

5. On appelle g_α et g_β les applications : $x \mapsto \sin\alpha x$ et $x \mapsto \sin\beta x$.
L'équation différentielle étant linéaire, la question posée revient à montrer que f_α, f_β, g_α, g_β vérifient (E).
f_α et g_α vérifient $y'' = -\alpha^2 y$ et aussi $y^{(4)} = \alpha^4 y$,
d'où : $y^{(4)} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) y'' + \alpha^2\beta^2 y = \left(\alpha^4 - \alpha^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \alpha^2\beta^2\right) y = 0$.
f_β et g_β vérifient $y'' = -\beta^2 y$ et aussi $y^{(4)} = \beta^4 y$,
d'où : $y^{(4)} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) y'' + \alpha^2\beta^2 y = \left(\beta^4 - \beta^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \alpha^2\beta^2\right) y = 0$.
Les quatre fonctions vérifient bien (E).

6. α et β étant non nuls, il suffit de montrer que la famille $\{f_\alpha,\ f_\beta,\ g_\alpha,\ g_\beta\}$ est libre.
On écrit : $af_\alpha + bf_\beta + cg_\alpha + dg_\beta = 0$, qu'on dérive successivement 3 fois :
$-a\alpha g_\alpha - b\beta g_\beta + c\alpha f_\alpha + d\beta f_\beta = 0$,
$-a\alpha^2 f_\alpha - b\beta^2 f_\beta - c\alpha^2 g_\alpha - d\beta^2 g_\beta = 0$, et enfin :

$a\alpha^3 g_\alpha + b\beta^3 g_\beta - c\alpha^3 f_\alpha - d\beta^3 f_\beta = 0$.
La première et la troisième relation, appliquées en 0, donnent : $a + b = 0$ et $-a\alpha^2 - b\beta^2 = 0$ d'où on tire facilement : $a = b = 0$ car $\alpha^2 \neq \beta^2$, car α et β sont strictement positifs et distincts.
La deuxième et la quatrième relation, appliquées en 0, donnent : $c\alpha + d\beta = 0$ et $-c\alpha^3 - d\beta^3 = 0$ d'où on tire facilement : $c = d = 0$ car $\alpha\beta^3 \neq \beta\alpha^3$, car α et β sont strictement positifs et distincts.
La famille $\{f_\alpha,\ f_\beta,\ g_\alpha,\ g_\beta\}$ est libre, c'est une base de l'ensemble des solutions de (E).

III Etude de $f_{\frac{1}{2},1}$

1. f est de période 4π, paire. Une étude sur $[0, 2\pi]$ suffit donc. On complète par symétrie par rapport à Oy.

2. $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} - \sin x = -\frac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}\left(1 + 4\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

$f'(x) = 0$ sur $[0, 2\pi]$, pour $x = 0$, $x = 2\pi$ et $x_0 = 2\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, qui est la seule valeur qui annule $1 + 4\cos\dfrac{x}{2}$ sur l'intervalle ; la solution générale est : $\pm 2\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)_{[4\pi]}$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		x_0		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	0

3. $f(x_0) = \cos\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right) + \cos\left(2\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right) = \cos\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\cos^2\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right) - 1$

$f(x_0) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - 1 = -\dfrac{9}{8}$.

4. On coupe la courbe selon une droite horizontale.
Pour $c > 2$, on n'a pas de solution ;
pour $c \in]0, 2]$, il y a une solution unique ;
pour $c \in \left]-\dfrac{9}{8}, 0\right]$, on a 2 solutions distinctes ;
pour $c = -\dfrac{9}{8}$, il y a une solution unique ;
et pour $c < -\dfrac{9}{8}$, on n'a pas de solution.

5. $f(x) = \cos\dfrac{x}{2} + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} - 1 = 2X^2 + X - 1$. On cherchera donc les solutions d'une équation de second degré, puis les solutions correspondantes en x sur $[0, 2\pi]$.

$c = -1$ correspond à $2X^2 + X = 0$, c'est à dire $X = 0$ ou $X = -\dfrac{1}{2}$.

$X = 0$ correspond à $\cos\dfrac{x}{2} = 0$ et donc $x = \pi$.

$X = -\dfrac{1}{2}$ correspond à $\cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et donc $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

$c = 0$ correspond à $2X^2 + X - 1 = 0$, c'est à dire $X = -1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$.

$X = -1$ correspond à $\cos\dfrac{x}{2} = -1$ et donc $x = 2\pi$.

$X = \dfrac{1}{2}$ correspond à $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$ et donc $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

6. $2X^2 + X - 1 = c$ s'écrit $2X^2 + X - (1 + c) = 0$.

La somme des racines de cette équation du second degré est : $\cos\dfrac{x_1}{2} + \cos\dfrac{x_2}{2} = -\dfrac{1}{2}$,

et leur produit est : $\cos\dfrac{x_1}{2}\cos\dfrac{x_2}{2} = -\dfrac{1 + c}{2}$.

7. L'équation différentielle : $8y'' + 5y = 3\cos\dfrac{x}{2} - 3\cos x$, est linéaire du second ordre, à coefficients constants et avec second membre. Le second membre est double.

Solution générale de l'équation homogène associée.

$\omega^2 = \dfrac{5}{8}$ et on a donc : $y = A\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x + B\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x$.

Solution particulière correspondant au second membre : $3\cos\dfrac{x}{2}$.

On la cherche sous la forme : $y = a\cos\dfrac{x}{2} + b\sin\dfrac{x}{2}$, ce qui donne :

$-2a\cos\dfrac{x}{2} - 2b\sin\dfrac{x}{2} + 5a\cos\dfrac{x}{2} + 5b\sin\dfrac{x}{2} = 3\cos\dfrac{x}{2}$, $a = 1$ et $b = 0$ conviennent.

Solution particulière correspondant au second membre : $-3\cos x$.

On la cherche sous la forme : $y = a\cos x + b\sin x$, ce qui donne :

$-8a\cos x - 8b\sin x + 5a\cos x + 5b\sin x = -3\cos x$, $a = 1$ et $b = 0$ conviennent.

Solution générale de l'équation avec second membre :

$y = A\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x + B\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x + \cos\dfrac{x}{2} + \cos x$.

Solution générale de l'équation avec second membre et conditions initiales.

$y = A\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x + B\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}x + \cos\dfrac{x}{2} + \cos x$ avec :

$y(0) = 2$, donne $A + 2 = 2$ et enfin : $A = 0$.

$y'(0) = 0$ donne $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}B = 0$ et enfin : $B = 0$.

La solution est donc $y = \cos\dfrac{x}{2} + \cos x = f(x)$.

8. Dans tous les cas, on pose : $\alpha^2 = \dfrac{5}{8}$ d'où $8f''_{\alpha,\beta} + 5f_{\alpha,\beta} = \left(5 - 8\beta^2\right) f_\beta$,

$\beta = \dfrac{1}{2}$ fournit $5 - 8\beta^2 = 3$ et correspond à la solution particulière du premier second membre.

$\beta = 1$ fournit $5 - 8\beta^2 = -3$ et correspond à la solution particulière du second second membre.

On retrouve bien la solution demandée.

IV Etude d'une suite de fonctions

1. $U_0(x) = \sin(x)\, P_0(x) = \sin(x)\, f_1(x) = \sin x\cos x$.

$U_1(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) P_1(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) f_1'x)f_{\frac{1}{2}}(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos(x)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$.

On a bien : $U_1 = \dfrac{1}{2}U_0$.

2. Cela revient donc à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n$.

La question précédente nous a fourni la raison.

$U_{n+1}(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) P_{n+1}(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) f_{\frac{1}{2^{n+1}}} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} f_{\frac{1}{2^k}}(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n} f_{\frac{1}{2^k}}(x)$

$= \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=0}^{n} f_{\frac{1}{2^k}}(x) = \dfrac{1}{2}U_n(x)$.

On a bien le résultat demandé, la suite $(u_n(x))$ est géométrique.

3. On a donc : $U_n(x) = \dfrac{1}{2^n}U_0(x) = \dfrac{1}{2^n}\sin x\cos x = \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x)$

D'où, pour $x \in]0,\pi]$, $\quad P_n(x) = \dfrac{\sin x\cos x}{2^n\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin x\cos x}{x}$

4. $P_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin x \cos x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

Par ailleurs, $P_n(0) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos 0 = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

La limite de $P_n(x)$ pour $n \to \infty$ est bien continue.

V Un développement de $\cot \alpha\pi$

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f_k(x) = \cos kx$ est 2π périodique, de même que $F_k(x)$.

Par ailleurs, f_k et F_k coincident sur $[-\pi, \pi]$, elles sont donc égales.

2. $f_{\frac{1}{3}}$ est de période 6π, et $f_{\frac{4}{3}}$ est de période $\dfrac{3\pi}{2}$.

3. Le problème de continuité est en $\pi_{[2\pi]}$, et, compte tenu de la périodicité, à étudier seulement en π, à gauche et à droite.

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} F_\alpha(x) = F_\alpha(\pi) = f_\alpha(\pi) = \cos \alpha\pi$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} F_\alpha(x) = \lim_{x\to-\pi^+} F_\alpha(x) = F_\alpha(-\pi) = f_\alpha(-\pi) = \cos(-\alpha\pi) = \cos \alpha\pi.$

F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Toujours par périodicité, le problème de dérivabilité n'est à étudier qu'en π.

Etude à gauche.

$F'_{\alpha_g}(\pi) = f'_{\alpha_g}(\pi) = f'_\alpha(\pi) = -\alpha \sin \alpha\pi.$

Etude à droite.

$F'_{\alpha_d}(\pi) = F'_{\alpha_d}(-\pi) = f'_{\alpha_d}(-\pi) = f'_\alpha(-\pi) = \alpha \sin \alpha\pi.$

Mais $\alpha \sin \alpha\pi \neq 0$, donc F_α n'est pas dérivable en $\pi_{[2\pi]}$.

4. $F_\alpha(\pi) = \cos \alpha\pi = \cos(E\pi + d\pi) = (-1)^E \cos d\pi$ avec $d \in]0, 1[$.

Le signe de $F_\alpha(\pi)$ dépend donc de la parité de E et de la position de d par rapport à $\dfrac{1}{2}$.

D'où le tableau :

	E pair	E impair
$d \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$	+	-
$d \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$	-	+
$d = \frac{1}{2}$	0	0

Par ailleurs, $F'_{\alpha_g}(\pi) = -\alpha \sin \alpha\pi = -\alpha \sin(E\pi + d\pi) = (-1)^{E+1} \alpha \sin d\pi.$

Mais ici, $\alpha \sin d\pi > 0$, le signe de $F'_{\alpha_g}(\pi)$ ne dépend que de E.

Si E est pair, $F'_{\alpha_g}(\pi) < 0$, et, si E est impair, $F'_{\alpha_g}(\pi) > 0$.

5. F_α est paire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(\alpha) = 0$.

$a_0(\alpha) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \cos \alpha t \,\mathrm{d}t = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}.$

On travaille maintenant avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos \alpha t \cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right)$$

$$a_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) = (-1)^n \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

La série de Fourier de F_α est donc : $S(F_\alpha)(x) = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx.$

Par ailleurs, F_α est 2π périodique, continue et de classe C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de F_α converge donc vers F_α.

6. $a_n(\alpha) = (-1)^n \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \dfrac{\sin \alpha\pi}{(\alpha - n)\pi} \dfrac{2(-1)^n \alpha}{\alpha + n} = \dfrac{\sin(\alpha - n)\pi}{(\alpha - n)\pi} \dfrac{2\alpha}{\alpha + n} \underset{\alpha \to n}{\longrightarrow} 1$,
car chacun des facteurs tend vers 1.
Par ailleurs, $a_n(\alpha) = (-1)^n \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \underset{\substack{\alpha \to k \\ k \neq n}}{\longrightarrow} 0$, car ce n'est pas alors une forme indéterminée.

7. De l'égalité entre F_α et sa série de Fourier, on tire facilement :
$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \cos \alpha x = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right)$.
On applique ceci en $x = \pi$, et comme $\sin \alpha\pi \neq 0$: $\cot \alpha\pi = \dfrac{1}{\pi} \left(\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$.