I Courbe soumise à une condition

1. Modulo π, par rapport à $\overrightarrow{i}$, la normale à la tangente fait un angle de $\theta + V + \dfrac{\pi}{2}$ qui doit dont être égal à 3θ.

Cela donne bien $V = 2\theta + \dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

2. Dans la mesure où elle est définie, on a : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = \tan\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

Ce qui donne $\rho' \cos 2\theta + \rho \sin 2\theta = 0$.

Si $\sin 2\theta = 0$, on a bien $V = \dfrac{\pi}{2}$ modulo π, et $\tan V$ n'est pas définie. Ce qui correspond à $\rho' = 0$. On a bien l'équivalence demandée.

3. $\mathcal{E}$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants et sans second membre. Les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc, sur un intervalle où $\cos 2\theta$ ne s'annule pas, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $\exp\left(-\displaystyle\int \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \mathrm{d}\theta\right)$.

L'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ convient, $\cos 2\theta > 0$, et donc $f(\theta) = \lambda \exp\left(\dfrac{1}{2} \ln(\cos 2\theta)\right) = \lambda\sqrt{\cos 2\theta}$ qui vérifie bien la condition initiale.

4. Finalement $f_\lambda(\theta) = \lambda\sqrt{\cos 2\theta}$.

La courbe d'équation polaire $\rho = \mu\sqrt{\cos 2\theta}$ est clairement homothétique de la courbe d'équation polaire $\rho = \lambda\sqrt{\cos 2\theta}$ de rapport $\dfrac{\mu}{\lambda}$.

5. On calcule d'abord $f'_\lambda(\theta) = -\lambda \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} f'_\lambda(\theta) = \pm\infty$ selon le signe de λ. En aucun cas on ne pourra prolonger f_λ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$\mathcal{E}$ n'a donc pas de solution non nulle sur $\mathbb{R}$.

6. -

6.1. On pose $f_1(\theta) = 1 + a\theta + b\theta^2 + c\theta^3 + o\left(\theta^3\right)$ et $f'_1(\theta) = a + 2b\theta + 3c\theta^2 + o\left(\theta^2\right)$, on écrit aussi $\cos 2\theta = 1 - 2\theta^2 + o\left(\theta^2\right)$ et $\sin 2\theta = 2\theta + o\left(\theta^2\right)$.
On reporte ces quatre développements dans l'équation différentielle en ne gardant que les termes jusqu'au rang 2, on obtient : $0 = a + 2(b+1)\theta + 3c\theta^2 + o\left(\theta^2\right)$.
Ce qui donne $a = 0$, $b = -1$, et $c = 0$. Finalement $f_1(\theta) = 1 - \theta^2 + o\left(\theta^3\right)$.

6.2. $\cos 2x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - (k-1)\right)}{k!} u^k + o\left(u^n\right)$.
D'où $\sqrt{\cos 2\theta} = \left(1 - 2\theta^2 + o\left(\theta^3\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \theta^2 + o\left(\theta^3\right)$ beaucoup plus simplement. On doit quand même noter que dans la question précédente, on n'avait pas eu à résoudre l'équation différentielle...

6.3. On a : $f_1(\theta) = 1 + f'_1(0)\theta + \dfrac{f''_1(0)}{2}\theta^2 + \dfrac{f'''_1(0)}{6}\theta^3 + o\left(\theta^3\right)$ par la formule de Taylor.
Ce qui donne : $f'_1(0) = 0$, $f''_1(0) = -2$ et $f'''_1(0) = 0$.

II Le lemniscate de Bernoulli

1. -

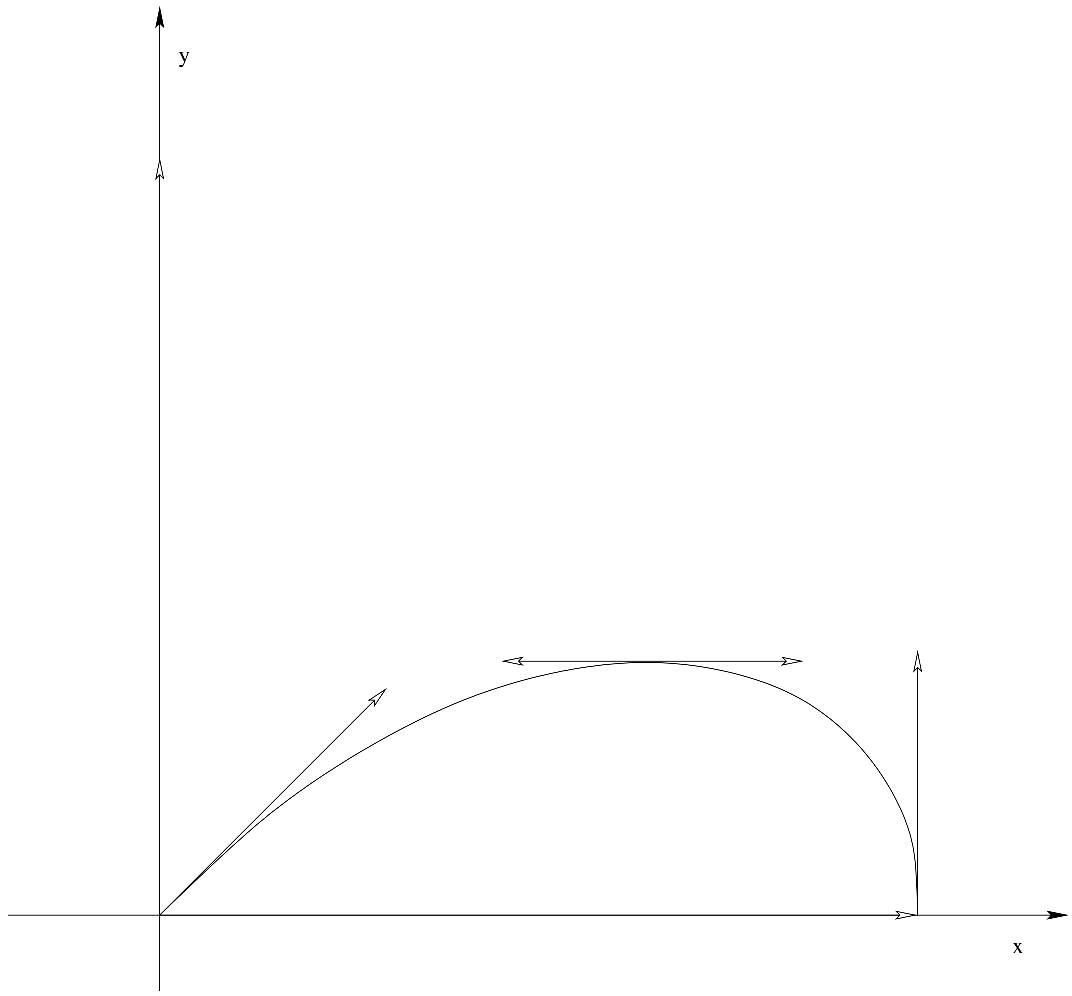
1.1. Si on change θ en $-\theta$, $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ ne change pas et donc $\mathcal{C}_1$ présente une symétrie par rapport à l'axe Ox et on peut limiter l'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Quand $\theta \to \dfrac{\pi}{4}$, on a $\rho \to 0$, la courbe est à l'origine.

D'autre part, $\rho' = -\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ et donc $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ qui tend vers 0 en $\dfrac{\pi}{4}$, la tangente est dans la direction du rayon vecteur.

C'est d'ailleurs toujours le cas à l'origine en polaire quand ρ est continue.

Il ne reste qu'à tracer le graphe, ici on n'en a tracé que la moitié.



1.2. On pourrait chercher les extrémums de $y = \rho\cos\theta$ et de $x = \rho\sin\theta$ pour avoir les tangentes horizontales et verticales.

On va plutôt utiliser la première partie : pour une tangente horizontale, la normale est verticale et réciproquement.

Une tangente verticale correspond donc à $3\theta = 0_{[\pi]}$, c'est à dire $\theta = 0$ dans notre intervalle.

Une tangente horizontale correspond donc à $3\theta = \dfrac{\pi}{2}_{[\pi]}$, c'est à dire $\theta = \pm\dfrac{\pi}{6}$ dans notre intervalle.

Le point à tangente verticale est de coordonnées $(0, 1)$.

Les points à tangente horizontales sont les intersections de la courbe avec les droites d'équation $\theta = \pm\dfrac{\pi}{6}$.

1.3. Le repère de Frénet pour $\theta = 0$ est donné par $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{i}$. En effet, $V = \dfrac{\pi}{2}$ et on se place dans le sens des θ croissants.

Le rayon de courbure est donné par $R = \dfrac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

Pour $\theta = 0$, on a $\rho = 1$, $\rho' = 0$ et $\rho'' = -2$, ce qui donne $R = \dfrac{1}{3}$.

Le centre de courbure est donc en $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$.

2. $\dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ est continue donc localement intégrable sur $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.

La fonction est paire, donc le problème d'intégrabilité est le même en $\pm\dfrac{\pi}{4}$, et si ces intégrales convergent, on aura $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$.

Enfin, la fonction est positive et on va travailler par équivalence en $\dfrac{\pi}{4}^{-}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}} \underset{\frac{\pi}{4}^{-}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dont l'intégrale en $\dfrac{\pi}{4}^{-}$ converge car $\dfrac{1}{2}<1$.

3. On a $\displaystyle L_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta \underset{\theta\to\frac{\pi}{4}}{\to} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = L = I$ car cette intégrale converge.

4. -

4.1. On a $\displaystyle L = I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$.

On pose $\varphi = 2\theta$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, et comme $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$ converge, $\displaystyle L = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi$.

4.2. On pose maintenant $u=\sqrt{\cos\varphi}$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi$ converge.

$u^2=\cos\varphi$, et donc $2u\,\mathrm{d}u = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

et comme, sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-u^4}$,

on a : $\displaystyle L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}\mathrm{d}u$.

5. Δ est le domaîne géométrique dont on cherche l'aire. En polaires $\displaystyle A = \iint_\Delta \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$.

Il nous faut décrire Δ en polaires : $M\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases}\rho\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\\ \theta\in\left[0,\sqrt{\cos 2\theta}\right]\end{cases}$

On a donc : $\displaystyle A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

III Fonction β d'Euler

1. La fonction $t\to t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,1[$, le problème de convergence est en 0 et en 1. La fonction est positive, donc on peut, et on va, travailler par équivalence.

$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\underset{t\to 0^+}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ dont l'intégrale converge en 0^+ si et seulement si $\alpha>0$.

$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\underset{t\to 1^-}{\sim}(1-t)^{\beta-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$ dont l'intégrale converge en 1^- si et seulement si $\beta>0$.

$B(\alpha,\beta)$ converge si et seulement si $\alpha>0$ et $\beta>0$.

2. Dans $B(\alpha,\beta)$ on pose $u=1-t$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, convergentes et égales.

$\displaystyle B(\alpha,\beta) = -\int_1^0(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\mathrm{d}u = B(\beta,\alpha)$

3. On pose $t = \sin^2\theta$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}_1$, donc les deux intégrales sont de même nature, convergentes et égales.

$\mathrm{d}t = 2\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

et donc : $B(\alpha,\beta) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(\alpha-1)}\theta\left(1-\sin^2\theta\right)^{\beta-1}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}\theta\,\cos^{2\beta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

4. Calculons : $\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0\theta\,\cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta = L$

IV Algorithmique

1. -

1.1. $n = 1$,

pour M_0^1, on a $k = 0$ et donc $\theta = 0$, M_0^1 est de coordonnées $(1,0)$,

pour M_1^1, on a $k = 1$ et donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, M_1^1 est de coordonnées $(0,0)$.

$2L_1 = 2$, la figure est laissée au lecteur.

1.2. $n = 2$,

pour M_0^2, on a $k = 0$ et donc $\theta = 0$, M_0^2 est de coordonnées $(1,0)$,

pour M_1^2, on a $k = 1$

et donc $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, M_1^2 est de coordonnées $\left(\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{4}}\cos\dfrac{\pi}{8}, \sqrt{\cos\dfrac{\pi}{4}}\sin\dfrac{\pi}{8}\right) \simeq (0.78, 0.32)$,

pour M_2^2, on a $k = 2$ et donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, M_2^2 est de coordonnées $(0,0)$,

$$\left\|\overrightarrow{M_0^2M_1^2}\right\| = \sqrt{\left(\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{8} - 1\right)^2} \simeq 0.39$$

$$\left\|\overrightarrow{M_1^2M_2^2}\right\| = \sqrt{\left(\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{8}\right)^2} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{4}} \simeq 0.84$$

Et finalement, $2L_1 \simeq 2.46$, la figure est encore laissée au lecteur.

1.3. Pour la figure, on reporte à partir de l'origine les angles 0, $\dfrac{\pi}{16}$, $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{3\pi}{16}$, $\dfrac{\pi}{4}$, les point M_k^n cherchés sont les intersections avec la courbe. On relie ces points pour avoir les segments demandés.

2. On va travailler en maple, les calculs étant pénibles à écrire en ligne, nous allons structurer le calcul.
On va d'abord créer 2 procédures `X(k,n)` et `Y(k,n)` qui calculent les coordonnées de M_k^n.

```
> X:=proc(k,n);
    sqrt(cos(k*Pi/2/n))*cos(k*Pi/4/n)
    end;
> Y:=proc(k,n);
    sqrt(cos(k*Pi/2/n))*sin(k*Pi/4/n)
    end;
```

On va maintenant écrire une procédure `l(k,n)` qui calcule la longueur approchée du segment $M_{k-1}^n M_k^n$.

```
> l:=proc(k,n);
    evalf(sqrt((X(k,n)-X(k-1,n))**2+(Y(k,n)-Y(k-1,n))**2))
    end;
```

On écrit alors la procédure `L(p)` qui calcule $2L_{2^p}$.

```
> L:=proc(p)
    local S,i;
    S:=0;
        for i from 1 to 2**p do
        S:=S+l(i,2**p)
        od;
    2*S;
    end;
```

On peut maintenant écrire la procédure demandée :

```
> CCP_TSI_2002_2:=proc()
    local A,B,i;
    A:=2;print(A);
    B:=L(2);print(B);
        for i from 3 while abs(B-A)>0.001 do
        A:=B;B:=L(i);print(B);
        od;
    'terminé'
    end;
```

On affiche "terminé" à la fin du calcul, pour éviter la répétition du dernier résultat !...
D'autre part, on n'a pas ici utilisé l'astuce classique de travailler avec 2^p points qui permet à chaque étape de réutiliser les points précédents...

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

http://c.caignaert.free.fr