I La trace

1. $\lambda A+\mu B$ a pour coefficient $i^{\grave{e}me}$ ligne, $j^{\grave{e}me}$ colonne : $\lambda a_{ij}+\mu b_{ij}$,

d'où $tr(\lambda A+\mu B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda a_{ii}+\mu b_{ii}=\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}+\mu\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}=\lambda\, tr(A)+\mu\, tr(B)$

Ce qui prouve la linéarité de la trace.

2. On séparera le cas où $n=1$ pour lequel on a évidemment $tr(AB)=tr(A)\,tr(B)$.

Pour $n\geqslant 2$, si $A=B=I_n$, on a $tr(AB)=n$ et $tr(A)\,tr(B)=n^2$, qui sont donc différents.

D'autre part, l'élément $i^{\grave{e}me}$ ligne, $i^{\grave{e}me}$ colonne de AB est : $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$ et celui de BA est : $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ji}$,

ce qui donne : $tr(AB)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ji}$

Finalement, $tr(AB)=tr(AB)$.

On a d'abord inversé les rôles de i et j puis utilisé les propriétés d'anneau de $\mathbb{R}$.

3. On a : $tr\left(P^{-1}AP\right)=tr\left(P^{-1}(AP)\right)=tr\left((AP)P^{-1}\right)=tr\left(APP^{-1}\right)=tr(A)$.

4. Les polynômes caractéristiques de 2 matrices semblables sont égaux. On va montrer que $tr(A)$ est $(-1)^{n-1}$ fois le coefficient de X^{n-1}, ce qui prouvera que les traces de 2 matrices semblables sont donc égales.

$P_A(\lambda)=\det\left(A-\lambda I_n\right)$ qu'on développe par multilinéarité en séparant dans chaque colonne les termes en a_{ij} et les termes en $-\lambda$.

On développe chacun des 2^n déterminants obtenus selon les colonnes contenant un $-\lambda$ sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Le polynôme caractéristiques est ainsi développé. Le coefficient de $(-\lambda)^k$ est une somme de déterminants d'ordre $n-k$.

On cherche le coefficient du terme en $(-\lambda)^{n-1}$, c'est la somme de n déterminants d'ordre 1 du type $|a_{ii}|$ [1] quand seule la colonne i contenait des coefficients de A. C'est donc bien la trace de A.

5. On n'a pas $AB-BA=2I_n$, car $tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$ et $tr(2I_n)=2n$.

L'égalité entraînerait l'égalité des traces.

6. Si A est antisymétrique, ses éléments diagonaux sont nuls car $a_{ii}=-a_{ii}$ et la trace est donc nulle.

II Le produit scalaire

1. Il faut montrer la linéarité par rapport à la première (ou la deuxième) variable, la symétrie, puis il faut montrer que la forme quadratique associée est positive, puis définie-positive.

- $\langle A,\lambda B+\mu C\rangle=tr\left({}^tA(\lambda B+\mu C)\right)=tr\left(\lambda\,{}^tAB+\mu\,{}^tAC\right)=\lambda\, tr\left({}^tAB\right)+\mu\, tr\left({}^tAC\right)$
  $\langle A,\lambda B+\mu C\rangle=\lambda\langle A,B\rangle+\mu\langle A,C\rangle$
- $\langle B,A\rangle=tr\left({}^tBA\right)=tr\left({}^t({}^tBA)\right)=tr\left({}^tAB\right)=\langle A,B\rangle$, en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace.
  La forme est donc bilinéaire symétrique.
- ${}^tAB$ a pour coefficient $i^{\grave{e}me}$ ligne, $i^{\grave{e}me}$ colonne : $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ji}$, celui de ${}^tAA$ est : $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}^2$

  d'où : $\langle A,A\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant 0$.

  La forme est bien positive.
- $\langle A,A\rangle=0\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0\Rightarrow\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\},\quad a_{i,j}=0$ et enfin $A=0$.

  La forme est définie positive.

[1] Ce n'est pas une valeur absolue mais un déterminant.

On a bien un produit scalaire. $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ a bien la formule voulue.

2. Le fait que les matrices symétriques et antisymétriques forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires est dans le cours !

On va le remontrer :

Si $A = A' + A''$ avec A' symétrique et A'' antisymétrique, alors ${}^tA = A' - A''$ et donc $A' = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ et $A'' = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ qui conviennent évidemment. Ce qui prouve que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$.

Enfin, la somme est directe car une matrice symétrique et antisymétrique est nulle (${}^tA = A = -A = 0$).

3. $\langle S, A\rangle = tr\,({}^tSA) = tr(SA) = \langle A, S\rangle = tr\,({}^tAS) = tr(-AS) = -tr(AS) = -tr(SA) = 0$

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont bien des supplémentaires orthogonaux.

4. $\|A - M\|^2 = \left\| \underbrace{(A - A')}_{\in A_n(\mathbb{R})} + \underbrace{(A' - M)}_{\in S_n(\mathbb{R})} \right\|^2 = \|A - A'\|^2 + \|A' - M\|^2 \geqslant \|A - A'\|^2$

par simple application du théorème de Pythagore. L'égalité est par ailleurs vérifiée pour $M = A'$!

On a aussi $A - A' = A - \dfrac{A + {}^tA}{2} = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ qui a la même norme que $\dfrac{{}^tA - A}{2}$, ce qui donne :

$$\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - m_{ij})^2 = \left\| \frac{{}^tA - A}{2} \right\|^2$$

5. On peut faire de multiples façons, mais on choisit d'appliquer la propriété précédente avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$.

Le minimum est réalisé pour $M = \dfrac{A + {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$ et vaut donc $0 + 0 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

6. $\|AC - CB\|^2 = tr\,({}^t(AC - CB)(AC - CB)) = tr\,(({}^tC{}^tA - {}^tB{}^tC)\,(AC - CB))$

$= tr\,({}^tC{}^tAAC - {}^tC{}^tACB - {}^tB{}^tCAC + {}^tB{}^tCCB)$

$\|AC - CB\|^2 = tr\,({}^tC{}^tAAC) - tr\,({}^tC{}^tACB) - tr\,({}^tB{}^tCAC) + tr\,({}^tB{}^tCCB)$.

D'autre part,

$\|{}^tAC - C{}^tB\|^2 = tr\,({}^tCA{}^tAC) - tr\,({}^tCAC{}^tB) - tr\,(B{}^tC{}^tAC) + tr\,(B{}^tCC{}^tB)$

$= tr\,({}^tC{}^tAAC) - tr\,({}^tB\,({}^tCAC)) - tr\,(({}^tC{}^tAC)\,B) + tr\,(({}^tCC{}^tB)\,B)$

$= tr\,({}^tC{}^tAAC) - tr\,({}^tB{}^tCAC) - tr\,({}^tC{}^tACB) + tr\,({}^tCC{}^tBB)$

$= tr\,({}^tC{}^tAAC) - tr\,({}^tB{}^tCAC) - tr\,({}^tC{}^tACB) + tr\,({}^tCCB{}^tB)$

$= tr\,({}^tC{}^tAAC) - tr\,({}^tB{}^tCAC) - tr\,({}^tC{}^tACB) + tr\,({}^tB{}^tCCB)$

Enfin, $\|AC - CB\|^2 = \|{}^tAC - C{}^tB\|^2$.

$AC = CB \Leftrightarrow AC - CB = 0 \Leftrightarrow \|AC - CB\| = 0 \Leftrightarrow \|{}^tAC - C{}^tB\| = 0 \Leftrightarrow {}^tAC - C{}^tB = 0 \Leftrightarrow {}^tAC = C{}^tB$

III Diagonalisation simultanée

1. Pour $n = 1$, la propriété est un peu idiote car toutes les matrices une ligne et une colonne dont diagonales et commutent.

2. -

2.1. Si toutes les matrices sont diagonales $\Omega = I_n$ convient...

2.2. S_1 qui est symétrique réelle est diagonalisable avec au besoin une matrice de pasage orthogonale.

Elle n'a pas une valeur propre unique car ce serait alors une matrice d'homothétie et elle serait diagonale !...

Soit λ une valeur propre d'ordre r avec $1 \leqslant r \leqslant n-1$, on diagonalise S_1 dans une base orthonormale de vecteurs propres en commençant par la valeur propre λ, la matrice de passage étant Ω_1, on a alors évidemment la forme demandée. Les éléments de la diagonale de Δ sont les autres valeurs propres de S_1 et sont donc différents de λ.

2.3. On commence ici à utiliser les propriétés des matrices par blocs, en particulier dans cette question la transposée. Rappelons que la notion de matrices par blocs, et à fortiori leurs propriétés, sont hors programme TSI.

On va aussi utiliser le fait que Ω_1 est orthogonale, $\Omega_1^{-1} = {}^t\Omega_1$.

Enfin, ${}^t\left(\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1\right) = {}^t\Omega_1 S_i\, {}^t\left(\Omega_1^{-1}\right) = {}^t\Omega_1 S_i \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1$, cette matrice est symétrique.

D'où : ${}^t\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_i & {}^tD_i \\ {}^tB_i & {}^tC_i \end{pmatrix}$

On a donc bien A_i et C_i qui sont symétriques et $D_i = {}^t B_i$.

2.4. Cette fois ci, et dans la question suivante, on va utiliser sans démonstration le produit des matrices par blocs.

$S_1 S_i = S_i S_1 \Leftrightarrow \Omega_1^{-1} S_1 S_i \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_i S_1 \Omega_1 \Leftrightarrow \Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1\, \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1\, \Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda A_i & \lambda B_i \\ \Delta D_i & \Delta C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_i & B_i \Delta \\ \lambda D_i & C_i \Delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda A_i = \lambda A_i \\ \lambda B_i = B_i \Delta \\ \Delta D_i = \lambda D_i \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda B_i = B_i \Delta \\ \Delta D_i = \lambda D_i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda B_i = B_i \Delta$ en utilisant $D_i = {}^tB_i$ et Δ symétrique car diagonale.

Les colonnes de λB_i sont celles de B_i multipliées par λ.

Comme Δ est diagonale, celles de $B_i \Delta$ sont celles de B_i multipliées par les autres valeurs propres de S_1, différentes de λ.

Ce qui prouve que les colonnes de B_i sont nulles et enfin que B_i, mais aussi D_i, est nulle.

2.5. On utilise encore le produit de matrices par blocs.

$S_i S j = S_j S_i \Leftrightarrow \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1\, \Omega_1^{-1} S_j \Omega_1 = \Omega_1^{-1} S_j \Omega_1\, \Omega_1^{-1} S_i \Omega_1$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & C_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i A_j & 0 \\ 0 & C_i C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j A_i & 0 \\ 0 & C_j C_i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$

2.6. On admet l'hypothèse de récurrence jusqu'au rang $n-1$.

On l'a montré au rang $n = 1$ ainsi que dans le cas où toutes les matrices sont diagonales. On est donc dans le cas où S_1 n'est pas diagonale.

On utilise l'hypothèse de récurrence aux rangs r et $n - r$ selon la notation de l'énoncé au 2.2.

On a donc Ω_A et Ω_B orthogonales telles que $\Omega_A^{-1} A_i \Omega_A$ et $\Omega_B^{-1} B_i \Omega_B$ sont diagonales.

On pose $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_A & 0 \\ 0 & \Omega_B \end{pmatrix}$ qui est aussi orthogonale, on a $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_A^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_B^{-1} \end{pmatrix}$

et on calcule $\Omega^{-1}\left(\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1\right)\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_A^{-1} A_i \Omega_A & 0 \\ 0 & \Omega_B^{-1} B_i \Omega_B \end{pmatrix}$ qui est bien diagonale.

Mais $\Omega^{-1}\left(\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1\right)\Omega = \Omega^{-1}\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 \Omega = \left(\Omega_1 \Omega\right)^{-1} S_i \left(\Omega_1 \Omega\right)$.

On pose $P = \Omega_1 \Omega$ qui est bien orthogonale, il suffit de constater que les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux 2 à 2.

Et P diagonalise tous les S_i simultanément. La propriété est vraie au rang n et la récurrence est démontrée.

3. -

3.1. Comme $A_2 = A_1 + I_2$, on obtient facilement $A_1A_2 = A_2A_1$, et comme $A_3 = 0$, ces matrices comutent 2 à 2.

On a le même résultat pour les matrices C_i puisque $C_2 = C_1 + I_2$ et $C_3 = -C_1 + 2I_2$.

Ces résultats se montrent aussi de façon élémentaire par produits élémentaires de matrices...

On diagonalise A_1 dont le polynôme caractéristique est : $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$.

On a 0 et 1 toutes deux valeurs propres simples. E_0 est engendré par $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et E_1 par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, tous deux normés et orthogonaux.

$\Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale et diagonalise aussi les A_i, il suffit de vérifier que les 2 vecteurs colonnes sont bien propres pour A_2 et A_3 (!...).

$\Omega_2^{-1}A_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Omega_2^{-1}A_2\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin $\Omega_2^{-1}A_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On diagonalise maintenant C_1 dont le polynôme caractéristique est :

$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$.

On a 0 et 1 toutes deux valeurs propres simples. E_0 est engendré par $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et E_1 par $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, tous deux normés et orthogonaux.

$\Omega'_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale et diagonalise aussi les C_i, il suffit de vérifier que les 2 vecteurs colonnes sont bien propres pour C_2 et C_3.

$\Omega_2'^{-1}C_1\Omega'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Omega_2'^{-1}C_2\Omega'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin $\Omega_2'^{-1}C_1\Omega'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2. On pose en utilisant le 2.6 : $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Elle est bien orthogonale, et diagonalise simultanément les S_i. On est ici, par rapport à la question précédente, dans le cas où Ω_1 est l'identité.

Les valeurs propres sont, dans l'ordre des vecteurs propres de Ω :

S_1	0	1	0	0
S_2	1	2	1	2
S_3	0	0	2	1

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

`http://c.caignaert.free.fr`