

I Première partie

I-1 prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I-2 Si A est à termes positifs et x aussi, Ax aussi car les coefficients de Ax sont des sommes de produits de termes positifs

Réciproquement, si Ae_j est à termes positifs, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est à termes positifs et ceci étant vrai pour toutes les colonnes, il en est de même pour A

I-3 Si A est à termes strictement positifs, et x à termes positifs, on sait déjà que Ax est à termes positifs. Il suffit donc de montrer que si x est non nul, les éléments de Ax sont non nuls. Les coefficients de Ax sont des sommes de produits de termes positifs dont l'un au moins est non nul car les termes de A sont non nuls et un au moins des termes de x est non nul... On a bien $Ax > 0$

Réciproquement, si Ae_j est à termes strictement positifs, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est à termes strictement positifs et ceci étant vrai pour toutes les colonnes, il en est de même pour A

I-4

I-4.1 Soit $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, $x + u_n > 0$ et a pour limite x quand $n \rightarrow +\infty$

I-4.2 La limite d'une suite de nombres positifs étant positive (le "strictement" de l'énoncé est inutile...), la limite d'une suite de vecteurs positifs est positive

I-4.3 Supposons que A ait un élément (au moins) strictement négatif a_{ij}
Prenons $x = (1, \dots, 1, t, 1, \dots, 1)$ avec t en $j^{\text{ème}}$ position, alors, le $i^{\text{ème}}$ élément de Ax est $a_{i1} + \dots + ta_{ij} + \dots + a_{in}$

Cette quantité prend le signe de a_{ij} quand $t \rightarrow +\infty$ et donc Ax a alors un élément strictement négatif, ce qui est impossible.

Ceci prouve que A est à termes positifs

En prenant pour A la matrice identité qui vérifie la propriété donnée,, on voit clairement que A n'est pas nécessairement à termes strictement positifs.

I-5

I-5.1 $(1, 1, 1)$ est clairement propre pour la valeur propre λ_1

I-5.2 A est symétrique réelle, donc diagonalisable, les autres valeurs propres sont réelles. Cela revient donc à montrer que λ_1 est une valeur propre simple

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ b & c-\lambda & a \\ c & a & b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c-\lambda & b & c \\ a+b+c-\lambda & c-\lambda & a \\ a+b+c-\lambda & a & b-\lambda \end{vmatrix} \\
& = (a+b+c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c-\lambda & a \\ 1 & a & b-\lambda \end{vmatrix} \\
& = (a+b+c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b-\lambda & a-c \\ 0 & a-b & b-c-\lambda \end{vmatrix} \\
& = (a+b+c-\lambda) \begin{vmatrix} c-b-\lambda & a-c \\ a-b & b-c-\lambda \end{vmatrix} \\
& = (a+b+c-\lambda) \left(\lambda^2 - (b-c)^2 - (a-c)(a-b) \right) \\
& = (a+b+c-\lambda) \left(\lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \right)
\end{aligned}$$

On sait que les autres valeurs propres sont réelles donc

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
0 & \leq a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\
a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc & = (a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc) \\
& < (a+b+c)^2
\end{aligned}$$

puisque a, b, c sont positifs

Ce qui donne $\lambda^2 < (a+b+c)^2 = \lambda_1^2$ et donc $|\lambda| < \lambda_1$ et cette dernière est bien une valeur propre simple.

II Deuxième partie

II-1

II-1.1 On a $x = Px + Qx$ et $Px \perp Qx$, par application du théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

Mais $Px = \langle x, z \rangle z$ ce qui donne $\|Px\|^2 = \langle x, z \rangle^2$ car z est normé, et enfin

$$\|x\|^2 = \langle x, z \rangle^2 + \|Qx\|^2$$

II-1.2 On a, par projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie $Px = \langle x, z \rangle z$

$$APx = \langle x, z \rangle Az = \langle x, z \rangle rz$$

D'autre part, $PAx = \langle Ax, z \rangle z$, mais $x = Px + Qx$ et $\langle Qx, z \rangle = 0$

$$D'où $PAx = \langle APx, z \rangle z + \langle AQx, z \rangle z$$$

Mais $\langle AQx, z \rangle = \langle Qx, Az \rangle$ car A est symétrique

$$\langle AQx, z \rangle = \langle Qx, rz \rangle = r \langle Qx, z \rangle = 0$$

$$\text{D'où } PAx = \langle \langle x, z \rangle rz, z \rangle z = \langle x, z \rangle r \langle z, z \rangle z = \langle x, z \rangle rz = APx$$

Pour l'autre relation,

$$AQx = Ax - APx = Ax - PAx = (I_n - P)Ax = QAx$$

II-1.3 On applique la première relation à Ax

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \|PAx\|^2 + \|QAx\|^2 = \|\langle x, z \rangle rz\|^2 + \|AQx\|^2 \\ &= \langle x, z \rangle^2 r^2 + \|AQx\|^2 = r^2 \|Px\|^2 + \|AQx\|^2 \end{aligned}$$

II-1.4 A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres u_1, u_2, \dots, u_n correspondants aux valeurs propres de l'énoncé ($u_1 = z$)

$$Qx = \langle x, u_2 \rangle u_2 + \langle x, u_3 \rangle u_3 + \dots + \langle x, u_n \rangle u_n$$

$$\|Qx\|^2 = \langle x, u_2 \rangle^2 + \langle x, u_3 \rangle^2 + \dots + \langle x, u_n \rangle^2$$

$$AQx = \langle x, u_2 \rangle \lambda_2 u_2 + \langle x, u_3 \rangle \lambda_3 u_3 + \dots + \langle x, u_n \rangle \lambda_n u_n$$

$$\|AQx\|^2 = \langle x, u_2 \rangle^2 \lambda_2^2 + \langle x, u_3 \rangle^2 \lambda_3^2 + \dots + \langle x, u_n \rangle^2 \lambda_n^2$$

$$\|AQx\|^2 \leq s^2 \left(\langle x, u_2 \rangle^2 + \langle x, u_3 \rangle^2 + \dots + \langle x, u_n \rangle^2 \right) = s^2 \|Qx\|^2$$

II-2

II-2.1 Il suffit de montrer que $t_1 = z$ et la récurrence est ensuite immédiate

$$t_1 = \frac{Az}{\|Az\|} = \frac{rz}{\|rz\|} = \frac{rz}{|r|} = z \text{ car } r > 0 \text{ (les valeurs propres sont non nulles puisque } A \text{ est inversible)}$$

II-2.2 On a $t_0 > 0$, il suffit de montrer que $t_1 > 0$ et la récurrence est ensuite immédiate pour montrer que $t_k > 0$

$$t_1 = \frac{At_0}{\|At_0\|} \text{ mais } \|At_0\| > 0 \text{ et } At_0 \text{ est à éléments strictement positifs (I-3)}$$

D'autre part, il faut montrer que pour $k > 0$, $t_k = z \Rightarrow t_{k-1} = z$ ce qui nous ramènera à $t_0 = z$ qui est faux.

$$t_k = z \Rightarrow \frac{At_{k-1}}{\|At_{k-1}\|} = z \text{ et donc } \frac{t_{k-1}}{\|At_{k-1}\|} = A^{-1}z \text{ mais } z \text{ est propre pour } A^{-1} \text{ pour la valeur propre } \frac{1}{r}$$

Donc $t_{k-1} = \alpha z$ mais en passant aux normes $|\alpha| = 1$ et comme $t_{k-1} > 0$, $t_{k-1} = z$ ce qui est impossible

II-2.3 Les vecteurs t_k, z sont normés, $\langle t_k, z \rangle$ est donc majoré par 1 par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

D'autre part, $\langle t_0, z \rangle$ vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$ fois la somme des coefficients de z qui sont positifs non tous nuls d'où $\langle t_0, z \rangle > 0$

La relation de récurrence démontrée ci-dessous prouve que tous les $\langle t_k, z \rangle > 0$

Montrons maintenant cette relation, (qui n'utilise pas la propriété précédente) :

$$\langle t_{k+1}, z \rangle = \left\langle \frac{At_k}{\|At_k\|}, z \right\rangle = \frac{1}{\|At_k\|} \langle At_k, z \rangle$$

Mais $t_k = Pt_k + Qt_k$

$$\langle t_{k+1}, z \rangle = \frac{1}{\|At_k\|} \langle APt_k, z \rangle + \frac{1}{\|At_k\|} \langle AQt_k, z \rangle$$

$$\langle t_{k+1}, z \rangle = \frac{1}{\|At_k\|} \langle APt_k, z \rangle + \frac{1}{\|At_k\|} \langle QAt_k, z \rangle$$

et $Pt_k = \langle t_k, z \rangle z$ donc $APt_k = \langle t_k, z \rangle rz$

et d'autre part $\langle QAt_k, z \rangle = 0$

$$\langle t_{k+1}, z \rangle = \frac{\langle t_k, z \rangle r}{\|At_k\|} \langle z, z \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} \langle t_k, z \rangle$$

En utilisant la première question,

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= r^2 \|Px\|^2 + \|AQx\|^2 \\ &\leq r^2 \|Px\|^2 + s^2 \|Qx\|^2 \\ &\leq r^2 \|Px\|^2 + r^2 \|Qx\|^2 = r^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne $\|At_k\|^2 \leq r^2$, car t_k est normé, et donc, les nombres étant positifs $\frac{r}{\|At_k\|} \geq 1$ et enfin, la suite $(\langle t_k, z \rangle)$ est croissante et comme elle est majorée, elle converge.

Comme $\langle t_0, z \rangle \neq 0$, la limite est non nulle

et donc la limite de $\frac{r}{\|At_k\|}$ existe et vaut 1, ce qu'on montre facilement

$$\text{en passant à la limite dans } \frac{\langle t_{k+1}, z \rangle}{\langle t_k, z \rangle} = \frac{r}{\|At_k\|}$$

II-2.4 $Qt_{k+1} = \frac{QAt_k}{\|At_k\|}$ d'où $\|Qt_{k+1}\|^2 = \frac{\|QAt_k\|^2}{\|At_k\|^2} = \frac{\|AQt_k\|^2}{\|At_k\|^2} \leq s^2 \frac{\|Qt_k\|^2}{\|At_k\|^2}$

en utilisant encore la première question

$$\text{Ce qui donne enfin : } \|Qt_{k+1}\| \leq \frac{s}{\|At_k\|} \|Qt_k\|$$

D'autre part, en utilisant toujours la première question,

$$\|t_k\|^2 = \langle t_k, z \rangle^2 + \|Qt_k\|^2 = 1 \text{ ce qui donne}$$

$$\|Qt_k\|^2 = 1 - \langle t_k, z \rangle^2 \text{ et } \|Qt_{k+1}\|^2 = 1 - \langle t_{k+1}, z \rangle^2$$

En utilisant l'inégalité du début de la question :

$$1 - \langle t_k, z \rangle^2 \leq \left(\frac{s}{\|At_k\|} \right)^2 (1 - \langle t_{k+1}, z \rangle^2)$$

$\|At_k\|$ tend vers r quand $k \rightarrow +\infty$ et donc $\frac{s}{\|At_k\|}$ tend vers $\frac{s}{r} < 1$ ce

qui prouve que la suite $(\|Qt_k\|)$ tend vers 0 (la série converge...) et donc Qt_k tend vers le vecteur nul.

Comme $\|Qt_k\|^2 = 1 - \langle t_k, z \rangle^2$, on obtient $\langle t_k, z \rangle^2$ qui tend vers 1 et donc $\langle t_k, z \rangle$, qui est positif, tend vers 1 aussi

Par simple carré scalaire, $\|t_k - z\|^2 = \|t_k\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle t_k, z \rangle$ tend donc aussi vers 0 et ainsi, $t_k - z$ tend vers le vecteur nul. Ce qui donne enfin t_k tend vers z quand $k \rightarrow +\infty$

$$\text{II-2.5 } \langle t_{k+1}, t_k \rangle = \langle Pt_{k+1} + Qt_{k+1}, Pt_k + Qt_k \rangle$$

qu'on va développer en utilisant $\langle Pu, Qv \rangle = 0$ pour tous les vecteurs u et v

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \langle Pt_{k+1}, Pt_k \rangle + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle + 0 + 0$$

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \langle \langle t_{k+1}, z \rangle z, \langle t_k, z \rangle z \rangle + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle$$

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \langle t_{k+1}, z \rangle \langle t_k, z \rangle + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle$$

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} \langle t_k, z \rangle^2 + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle$$

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} \|Pt_k\|^2 + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle$$

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} (1 - \|Qt_k\|^2) + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle$$

II-3

- Initialisation

La matrice A est connue

On fixe un vecteur $t := \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $u := \frac{At}{\|At\|}$

On fixe une erreur tolérée de $\varepsilon > 0$

On s'arrange pour que les calculs se fassent en "virgule flottante"

- Boucle

Tant que le test d'arrêt n'est pas réalisé, on fait $t := u$ puis $u := \frac{At}{\|At\|}$

- Test d'arrêt

On choisit par exemple $\|u - t\| \leq \varepsilon$ ce qui ne garantit rien si la convergence est très lente...

Ce ne devrait pas être le cas compte tenu de la majoration par une série géométrique géométrique de $\|Qt_k\|$.. qui entraîne sa convergence rapide vers 0

- Résultat

Une valeur approché de z est u et une valeur approchée de r est $\|At\|$

On prend les dernières valeurs trouvées