Préliminaires

1: f est 2π-périodique, paire, continue (car paire), et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par le théorème de Dirichlet, elle est développable en série de Fourier, égale à la somme de sa série de Fourier.

Comme elle est paire, les b_n sont nuls pour $n \in \mathbb{N}^*$

$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x)dx = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)dx$

$= \dfrac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\left(\alpha + n\right)x\right) + \cos\left(\left(\alpha - n\right)x\right)dx$

$= (-1)^n \left(\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{(\alpha+n)\,\pi} + \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{(\alpha-n)\,\pi}\right) = (-1)^n \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{(\alpha^2-n^2)\,\pi}$

$\alpha \in \left]0, 1\right[$, les cos s'intègrent bien de cette façon

On a donc $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{(\alpha^2-n^2)\,\pi}\cos(nx) \text{ pour } x \in \mathbb{R}}$

2: On applique ceci en π en divisant par $\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}$

et en utilisant $\cos(n\pi) = (-1)^n$

D'où $\pi\cot\left(\alpha\pi\right) = \dfrac{1}{\alpha} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2\alpha}{(\alpha^2-n^2)}$

Ce qui donne enfin : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n^2-\alpha^2)} = \dfrac{1}{2\alpha^2} - \dfrac{\pi}{2\alpha}\cot\left(\alpha\pi\right)}$

Ce qui prouve en passant que la série converge !...

I L'opérateur différence Δ

1: $\left[\Delta\left(H\right)\right]_n = H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$

$\boxed{\Delta\left(H\right) \text{ est la suite } \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}}$

2:

a) L'image d'une suite indexées par $\mathbb{N}^*$ est clairement une suite indexée par $\mathbb{N}^*$

Reste à montrer que Δ est linéaire.

$\left[\Delta\left(\lambda.u + \mu.v\right)\right]_n = \left(\lambda.u + \mu.v\right)_{n+1} - \left(\lambda.u + \mu.v\right)_n$

$= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} - \lambda u_n - \mu v_n = \lambda\left[\Delta\left(u\right)\right]_n + \mu\left[\Delta\left(v\right)\right]_n$

b) On a donc $U_{n+1} = U_n + u_n$ et $U_1 = a$, on reconnait une suite récurrente linéaire. Les U_k sont déterminés de façon unique par récurrence. Ceci nous donne, $\boxed{U_1 = a,\, U_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} u_k}$

c) Ce qu'on vient de faire prouve que l'image de Δ est E tout entier et que le noyau de Δ ne contient qu'une suite qui est nécessairement la suite nulle puisque Δ est linéaire.

3: $\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}v_k - u_kv_k = \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}v_k - \sum_{k=p}^{q-1} u_kv_k$

$= \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}v_k - \sum_{k=p-1}^{q-2} u_{k+1}v_{k+1}$ en réindexant la deuxième somme.

$\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}(v_k - v_{k+1}) - u_pv_p + u_qv_q$ en rajoutant ces termes pour compenser les différences d'indices au début et à la fin.

On a bien : $\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_qv_q - u_pv_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k)$

et enfin : $\boxed{\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_qv_q - u_pv_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}[\Delta(v)]_k}$

4: On prend, $p = 1$, $q = n$, $u_k = k$ et $v_k = H_k$ et on obtient, en utilisant $[\Delta(v)]_k = \dfrac{1}{k+1}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - H_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+1} = nH_n - n}$$

II Les fonctions Γ et Ψ d'Euler

1: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

La fonction qu'on intègre est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$, elle est positive non identiquement nulle, et l'intégrale, si elle converge sera strictement positive.

Il y a un problème de convergence de l'intégrale en 0 et en $+\infty$

En 0 : $e^{-t}t^{x-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ dont l'intégrale ne converge que si $1 - x < 1$ ou encore $x > 0$

En $+\infty$: $e^{-\frac{t}{2}}t^{x-1}$ tend vers 0 et donc $e^{-t}t^{x-1}$ est positive, négligeable devant $e^{-\frac{t}{2}}$ dont l'intégrale converge.

L'intégrale ne converge donc que pour $x > 0$ et elle est alors strictement positive.

2: $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$

On choisit de dériver t^x et d'intégrer e^{-t}. Le problème est de savoir si $-e^{-t}t^x$ a une limite finie en 0 et en $+\infty$. Ces deux limites existent et sont nulles.

Comme l'intégrale converge, l'intégration par parties est possible et est de crochet nul.

On obtient immédiatement : $\boxed{\Gamma(x+1) = -\left(-\int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1} dt\right) = x\Gamma(x)}$

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$ et la relation de récurrence donne également $\Gamma(n) = (n-1)!$ par récurrence immédiate !

3:

a) Comme $a < b$, $\boxed{\text{pour } t \in]0,1],\ \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = t^{a-1}}$

et $\boxed{\text{pour } t \geqslant 1,\ \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = t^{b-1}}$

D'autre part, t^{x-1} est positive, monotone en x, décroissant ou croissant selon la valeur de t

Enfin : $\boxed{0 \leqslant t^{x-1} \leqslant \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)}$

b) Cette question est très longue, ce qui explique qu'on va la rédiger de façon succinte. On va d'abord travailler pour $x \in [a,b]$

- Appelons $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$, $|f(x,t)| \leqslant e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)$ positive et indépendant de x
  $\int_0^{+\infty} e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) dt$ converge car elle converge en 0, y étant équivalent à $e^{-t}t^{a-1}$ et en $+\infty$ car elle y est équivalente à $e^{-t}t^{b-1}$
  Ceci prouve que Γ est continue sur $[a,b]$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^{x-1}\ln t$
  $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)|\ln t|$ positive et indépendant de x
  $\int_0^{+\infty} e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)|\ln t|\, dt$ converge en 0 et en $+\infty$
  - en 0 : $e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)|\ln t| = e^{-t}t^{a-1}|\ln t| = e^{-t}t^{a/2}|\ln t|\dfrac{1}{t^{1-a/2}}$
    $e^{-t}t^{a/2}|\ln t|$ tend vers 0 et l'intégrale de $\dfrac{1}{t^{1-a/2}}$ converge
  - en $+\infty$: $e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)|\ln t| = e^{-t}t^{b-1}|\ln t| = e^{-t/2}e^{-t/2}t^{b-1}|\ln t|$
    $e^{-t/2}t^{b-1}|\ln t|$ tend vers 0 et l'intégrale de $e^{-t/2}$ converge

  Ce qui prouve que Γ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t dt$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = e^{-t}t^{x-1}\ln^2 t$

$\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)\ln^2 t$ positive et indépendant de x

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)\ln^2 t dt$ converge en 0 et en $+\infty$

- en 0 : $e^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)\ln^2 t = e^{-t}t^{a-1}\ln^2 t = e^{-t}t^{a/2}\ln^2 t\dfrac{1}{t^{1-a/2}}$

  $e^{-t}t^{a/2}\ln^2 t$ tend vers 0 et l'intégrale de $\dfrac{1}{t^{1-a/2}}$ converge
- en $+\infty$: $e^{-t}\max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)\ln^2 t = e^{-t}t^{b-1}\ln^2 t = e^{-t/2}e^{-t/2}t^{b-1}\ln^2 t$

  $e^{-t/2}t^{b-1}\ln^2 t$ tend vers 0 et l'intégrale de $e^{-t/2}$ converge

Ce qui prouve que Γ est de classe C^2 sur $[a,b]$ et $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln^2 t dt$

- Enfin, $\boxed{\Gamma \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$, $\boxed{\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t dt}$ et $\boxed{\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln^2 t dt}$

4: $\boxed{\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right) = \ln(x)}$

$\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ d'où $\boxed{\Psi(x) = \ln(\Gamma(x))'}$

On dérive la première relation, ce qui donne $\boxed{\Psi(x+1) - \Psi(x) = \dfrac{1}{x}}$

$\Delta\left(\left(\Psi(n+\alpha)\right)_{n\geqslant 1}\right)_k = \Psi(k+1+\alpha) - \Psi(k+\alpha) = \dfrac{1}{k+\alpha}$

$\boxed{\text{La suite } \Delta\left(\left(\Psi(n+\alpha)\right)_{n\geqslant 1}\right) \text{ est la suite } \left(\dfrac{1}{n+\alpha}\right)_{n\geqslant 1}}$

$\Delta\left(\left(\Psi(n-\alpha)\right)_{n\geqslant 1}\right)_k = \Psi(k+1-\alpha) - \Psi(k-\alpha) = \dfrac{1}{k-\alpha}$

$\boxed{\text{La suite } \Delta\left(\left(\Psi(n-\alpha)\right)_{n\geqslant 1}\right) \text{ est la suite } \left(\dfrac{1}{n-\alpha}\right)_{n\geqslant 1}}$

III Formule des compléments

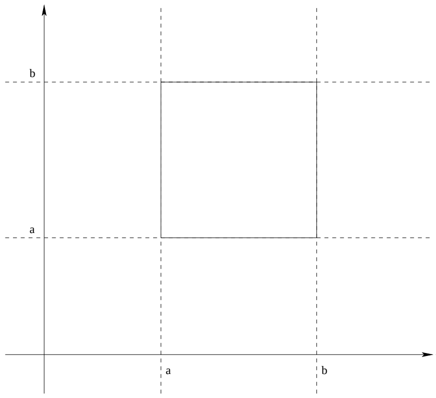
1: $\tan^{2x-1}\theta$ est continue, positive sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, le problème est un problème de convergence de l'intégrale en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$

- en 0 : $\tan^{2x-1}\theta \sim \theta^{2x-1} = \dfrac{1}{\theta^{1-2x}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $1-2x<1$, c'est à dire $x>0$

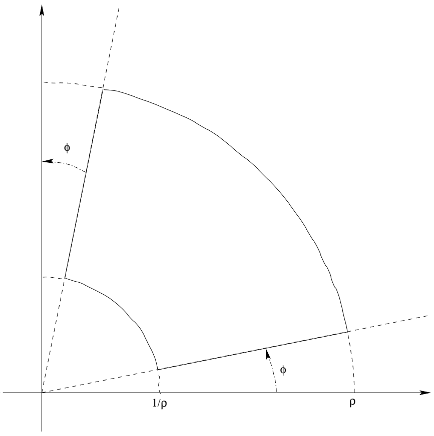
- en $\frac{\pi}{2}$: $\tan^{2x-1}\theta \sim \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{2x-1}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $2x-1<1$, c'est à dire $x<1$

$I(x)$ converge si et seulement si $x \in \left]0,1\right[$

2: Voilà les deux figures demandées, données sans commentaires particuliers



$C(a,b)$



$S(\rho,\phi)$

3: $G(\rho,\varphi) = \iint_{S(\rho,\varphi)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)} dudv$

On pose $u = r\sin\theta$ et $v = r\cos\theta$, $dudv = rdrd\theta$ et le nouveau domaine devient : $r \in \left[\frac{1}{\rho},\rho\right]$ et $\theta \in \left[\varphi, \frac{\pi}{2}-\varphi\right]$

D'où $G(\rho,\varphi) = \int_{\frac{1}{\rho}}^{\rho}\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1}\theta e^{-r^2} rdrd\theta = \int_{\frac{1}{\rho}}^{\rho} e^{-r^2} rdr \times \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1}\theta d\theta$ qui est le produit de 2 intégrales simples

On reconnait l'opposé de la moitié de la dérivée de e^{-r^2} dans la première intégrale et on obtient :

$G(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2}\right)\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \tan^{2x-1}\theta d\theta$

Donc, quand $\varphi \to 0$, $G(\rho,\varphi) \to \frac{1}{2}\left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2}\right)\frac{\pi}{2\sin\pi x}$

De plus, quand $\rho \to +\infty$, $\frac{1}{2}\left(e^{-1/\rho^2} - e^{-\rho^2}\right)\frac{\pi}{2\sin\pi x} \to \frac{\pi}{4\sin\pi x}$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left(\lim\limits_{\varphi\to 0} G(\rho,\varphi)\right) = \frac{\pi}{4\sin\pi x}}$

4: $F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \iint_{C\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)} dudv$

$= \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} v^{2x-1} e^{-v^2} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} dudv$ car le domaine est ici un rectangle

$F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} v^{2x-1} e^{-v^2} dv \times \int_{\frac{1}{\rho\sqrt{2}}}^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du$ qui est le produit de 2 intégrales simples

On pose $t = v^2$ dans la première et $t = u^2$ dans la seconde

$F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \times \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{-x} e^{-t} dt$

$= \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$

Quand $\rho \to +\infty$, $\int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{x-1} e^{-t} dt \to \Gamma(x)$ et $\int_{\frac{1}{2\rho^2}}^{\frac{\rho^2}{2}} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \to \Gamma(1-x)$ car ce sont des intégrales convergentes en 0 et en $+\infty$

Finalement $\boxed{\lim_{\rho \to +\infty} \left(F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)}$

$F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right) = \iint_{C\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right)} \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)} dudv$

$= \int_{\frac{\sin\varphi}{\rho}}^{\rho} \int_{\frac{\sin\varphi}{\rho}}^{\rho} v^{2x-1} e^{-v^2} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} dudv$ car le domaine est ici un rectangle

$F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right) = \int_{\frac{\sin\varphi}{\rho}}^{\rho} v^{2x-1} e^{-v^2} dv \times \int_{\frac{\sin\varphi}{\rho}}^{\rho} \frac{1}{u^{2x-1}} e^{-u^2} du$ qui est le produit de 2 intégrales simples

On pose $t = v^2$ dans la première et $t = u^2$ dans la seconde

$F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right) = \frac{1}{2} \int_{\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)^2}^{\rho^2} t^{x-1} e^{-t} dt \times \frac{1}{2} \int_{\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)^2}^{\rho^2} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$

Quand $\varphi \to 0$, $F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right) \to \frac{1}{4} \int_0^{\rho^2} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{\rho^2} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt$ car ce sont des intégrales convergentes en 0

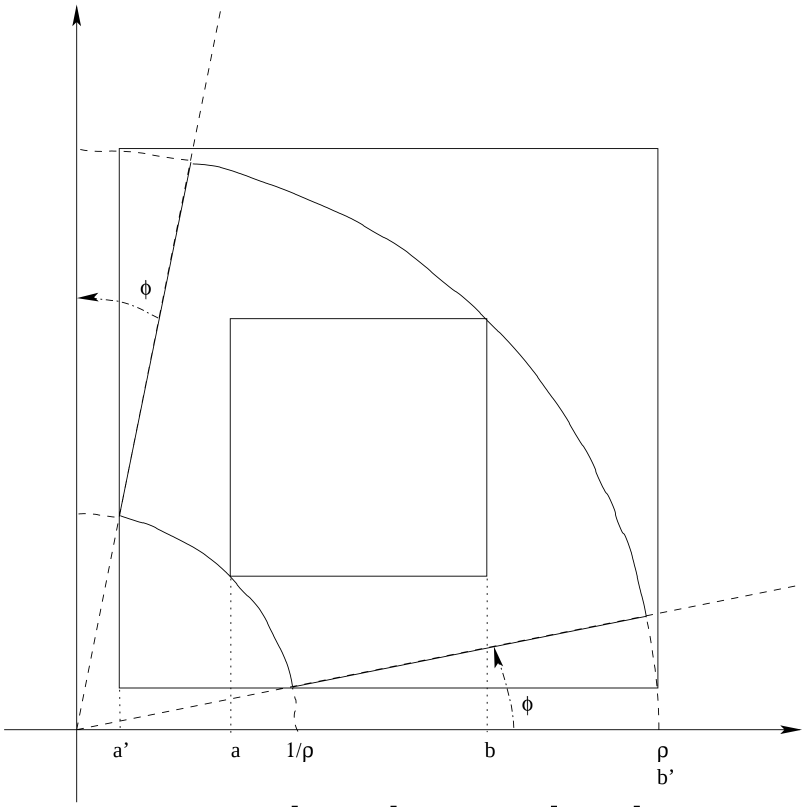
Quand $\rho \to +\infty$, $\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} t^{(1-x)-1} e^{-t} dt \to \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)$ car ce sont des intégrales convergentes en $+\infty$

Finalement $\boxed{\lim_{\rho \to +\infty} \left(\lim_{\varphi \to 0} F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right)\right) = \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x)}$

5: Voici la figure demandée avec φ assez petit, on voit bien l'inclusion des domaines. Si φ n'est pas assez petit, alors le petit carré n'est pas entièreemnt inclus dans le secteur de couronne circulaire...

Deux sommets du petit carré sont bien sur les arcs de cercle, à cause de "$\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$" et "$\frac{\rho}{\sqrt{2}}$"

Deux "sommets" du secteur de couronne sont bien sur les cotés su grand carré, à cause de "$\dfrac{\sin\varphi}{\rho}$"



Ici $[a,b]=\left[\frac{1}{\rho\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right]$ et $[a',b']=\left[\frac{\sin\varphi}{\rho},\rho\right]$

Comme la fonction qu'on intègre est positive, l'inclusion des domaines donne des inégalités sur les intégrales dans le même sens

Pour φ assez petit $\boxed{F\left(\dfrac{1}{\rho\sqrt{2}},\dfrac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\leqslant G(\rho,\varphi)\leqslant F\left(\dfrac{\sin\varphi}{\rho},\rho\right)}$

6: On passe à la limite quand $\varphi\to 0$ puis quand $\rho\to+\infty$ et on obtient

$\dfrac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\leqslant\dfrac{\pi}{4\sin\pi x}\leqslant\dfrac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)$

Ce qui donne enfin $\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\text{ pour }x\in\,]0,1[}$

Conclusion

1: On prend le logarithme dans la formule des compléments

$\ln(\Gamma(x)) + \ln(\Gamma(1-x)) = \ln\pi - \ln(\sin\pi x)$, qu'on dérive

$\Psi(x) - \Psi(1-x) = -\pi\dfrac{\cos\pi x}{\sin\pi x}$ c'est à dire

$\boxed{\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi\cot\pi x \text{ pour } x \in]0,1[}$

2:

a) $\dfrac{1}{X^2-\alpha^2} = \dfrac{A}{X-\alpha} + \dfrac{B}{X+\alpha}$ ($\alpha \neq 0$, on a deux pôles simples)

On calcule A en multipliant par $X-\alpha$ et en prenant $X = \alpha$ et B en multipliant par $X+\alpha$ et en prenant $X = -\alpha$

$A = \dfrac{1}{2\alpha}$ et $B = -\dfrac{1}{2\alpha}$ $\boxed{\dfrac{1}{X^2-\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha}\left(\dfrac{1}{X-\alpha} - \dfrac{1}{X+\alpha}\right)}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2-\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k-\alpha} - \dfrac{1}{k+\alpha}\right) = \dfrac{1}{2\alpha}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k-\alpha} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+\alpha}\right)$

qui ne pose pas de problème car $\alpha \in]0,1[$

$= \dfrac{1}{2\alpha}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\Psi(k+1-\alpha) - \Psi(k-\alpha)) - \sum\limits_{k=1}^{n}(\Psi(k+1+\alpha) - \Psi(k+\alpha))\right)$

en utilisant la deuxième partie

$= \dfrac{1}{2\alpha}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\Psi(k+1-\alpha) - \sum\limits_{k=1}^{n}\Psi(k-\alpha) - \sum\limits_{k=1}^{n}\Psi(k+1+\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{n}\Psi(k+\alpha)\right)$

$= \dfrac{1}{2\alpha}(\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha) + \Psi(1+\alpha))$ car les termes se simplifient 2 par 2

$\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2-\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha}(\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha)) + \dfrac{1}{2\alpha}(\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha))}$

3:

a) Il suffit de montrer que Ψ' est positive, c'est à dire que $\dfrac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$ est positive ou encore $\Gamma'^2 \leqslant \Gamma''\Gamma$

$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t/2}t^{(x-1)/2} \times e^{-t/2}t^{(x-1)/2}\ln t dt\right)^2$

forme à laquelle on applique l'inégalite de Cauchy-Scwartz

$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t dt\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty}\left(e^{-t/2}t^{(x-1)/2}\right)^2 dt \times \int_0^{+\infty}\left(e^{-t/2}t^{(x-1)/2}\ln t\right)^2 dt$

$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t dt\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \times \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln^2 t dt$ ce qui est bien le résultat demandé

b) Ψ est donc croissante $\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \geqslant 0$ et comme $\alpha \in]0,1[$

$\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n)$

$\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leqslant (\Psi(n+2) - \Psi(n+1)) + (\Psi(n+1) - \Psi(n))$

On a bien $\boxed{0 \leqslant \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n) \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}}$

4: On a donc $\Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \to 0$ quand n$\to +\infty$ et enfin

$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2 - \alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha}(\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha))}$ ce qui est le résultat donné par Maple