1 Première question

1. En écrivant $\exp(-int) = \cos nt - i \sin nt$, il vient immédiatement :

   $\boxed{c_0(f) = a_0(f)}$ et

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \text{ et } c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}}$

2. $|a_n(f)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ et $|b_n(f)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ entrainent la convergence absolue de $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ quand on a la convergence absolue de $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$.

   $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$ et $|c_{-n}(f)| \leqslant \dfrac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$ entrainent la convergence absolue de $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ quand on a celle de $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$

   On a fait ici une démonstration également valable si f est à valeur complexe.

3. On a $a_0(f) + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$

   $= c_0(f) + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(a_n(f) \dfrac{\exp(inx) + \exp(-inx)}{2} + b_n(f) \dfrac{\exp(inx) - \exp(-inx)}{2i} \right)$

   $= c_0(f) + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \exp(inx) + \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \exp(-inx) \right)$

   Ce qui est le résultat demandé.

2 Deuxième question

1. Cette équation différentielle est alors à coefficients constant, l'équation caractéristique est : $r^2 + a = 0$.

   Si $a \leqslant 0$, les solutions non nulles ne sont pas périodiques, en polynômes et en exponentielles.

   Si $a > 0$, les solutions non nulles sont périodiques de plus petite période $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}$. Pour que 2π soit une période, il faut et il suffit d'avoir un entier p tel que $p\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}} = 2\pi$

   $\boxed{\text{La condition nécessaire et suffisante est } a = p^2,\ p \in \mathbb{N}^*}$

2. $\mathcal{E}_{a,0}$ admet toujours des solutions réelles non nulles... comme toute équation différentielle linéaire à coefficients réels constants.

3 Troisième question

1. $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\exp(-int)\,dt$

   $= \dfrac{1}{2\pi}\left[f(t)\exp(-int)\right]_0^{2\pi} + \dfrac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)\,dt = inc_n(f)$

   $\boxed{c_n(f') = inc_n(f)}$

2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a par récurrence facile sur k $\boxed{c_n\left(f^{(k)}\right) = i^k n^k c_n(f)}$

   L'amorce pour $k = 0$ étant évidente.

3. Il découle $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{\left|c_n\left(f^{(k)}\right)\right|}{|n|^k}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

   Comme, de plus, $\lim\limits_{|n|\to+\infty} c_n\left(f^{(k)}\right) = 0$ en utilisant la relation du début de la question et le fait que $f^{(k+1)}$ est continue donc bornée.

   On a donc bien $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ en $\pm\infty$

   et enfin $\boxed{c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right) \text{ et } c_{-n}(f) = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)}$

4. La fonction $f^{(k)}$ est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, car de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc lui appliquer le théorème de Dirichlet, cas continu. On obtient donc la convergence absolue de la série de Fourier et sa somme qui est la fonction de départ.

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = c_0\left(f^{(k)}\right) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(c_n\left(f^{(k)}\right)\exp(inx) + c_{-n}\left(f^{(k)}\right)\exp(-inx)\right)}$

   Remarquons que pour k non nul, $c_0\left(f^{(k)}\right) = 0$ en utilisant les relations du début de la question.

   Si on dérive terme à terme la série de Fourier, on obtient :

   $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(inc_n\left(f^{(k)}\right)\exp(inx) - inc_{-n}\left(f^{(k)}\right)\exp(-inx)\right)$

   $= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(c_n\left(f^{(k+1)}\right)\exp(inx) + c_{-n}\left(f^{(k+1)}\right)\exp(-inx)\right)$

   $= c_0\left(f^{(k+1)}\right) + \left(c_n\left(f^{(k+1)}\right)\exp(inx) + c_{-n}\left(f^{(k+1)}\right)\exp(-inx)\right)$

   $= f^{(k+1)}(x)$

   On peut dériver terme à terme la somme de la série de Fourier.

4 Quatrième question

1. une solution de $\mathcal{E}_{a,b}$ sur un intervalle quelconque est de classe $\mathcal{C}^2$.

   Or $y'' = -(a + b\exp(2ix))\,y$ prouve que y'' est de classe $\mathcal{C}^2$, donc y de classe $\mathcal{C}^4$, par récurrence immédiate de classe $\mathcal{C}^{2p}$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. La fonction et toutes ses dérivées sont continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, car de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc leur appliquer le théorème de Dirichlet, cas continu. Elles sont donc égales aux sommes de leur séries de Fourier respectives.

3. $c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a + b\exp(2ix))\,f(x)\exp(-inx)\,dx$

   $= a\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)\,dx + b\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-i(n-2)x)\,dx$

   $\boxed{c_n(g) = ac_n(f) + bc_{n-2}(f)}$

4. On écrit $f(x) = c_0(f) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(inx) + c_{-n}(f)\exp(-inx))$

   D'après la troisième question, on peut dériver terme à terme,

   ce qui donne :

   $f''(x) = c_0(f'') + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f'')\exp(inx) + c_{-n}(f'')\exp(-inx))$

   $= -n^2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(inx) + c_{-n}(f)\exp(-inx))$

   Comme on a convergence absolue de toutes ces séries, on pourra regrouper les termes comme on veut. On obtient :

   $0 = -n^2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(inx) + c_{-n}(f)\exp(-inx))$

   $+(a + b\exp(2ix))\left(c_0(f) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(inx) + c_{-n}(f)\exp(-inx))\right)$

   Ce qui se réécrit :

   $\left(n^2 - a\right)\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(inx) + c_{-n}(f)\exp(-inx)) - ac_0(f)$

   $= b\left(c_0(f)\exp(2ix) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(c_n(f)\exp(i(n+2)x) + c_{-n}(f)\exp(i(-n+2)x))\right)$

   On peut encore le réécrire :

   $\left(n^2 - a\right)\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\exp(inx) = b\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\exp(i(n+2)x)$

   On réindexe la deuxième partie :

   $\left(n^2 - a\right)\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\exp(inx) = b\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-2}(f)\exp(inx)$

   Par unicité (admise ?) du développement en série de Fourier, on obtient :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \left(n^2 - a\right)c_n(f) = bc_{n-2}(f)}$

5 Cinquième question

1. On a donc ici $(2p+1)^2 c_{2p+1}(f) = bc_{2p-1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$,
   $2p+1$ et b ne sont jamais nuls, ce qui prouve que si $c_1(f) = 0$, alors
   $\boxed{\forall p \in \mathbb{Z},\ c_{2p+1}(f) = 0}$ par double récurrence montante et descendante
   Si $c_1(f)$ n'est pas nul, la suite $(c_{-2p+1}(f))$ est clairement non nulle, croissante en valeur absolue dès que $\dfrac{(2p+1)^2}{|b|} \geqslant 1$, la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} c_{-2p+1}(f)$ diverge grossièrement et donc ne converge pas absolument.
2. On applique la relation de récuurence de la question précédente avec $n = 0$, ce qui donne :
   $0 = bc_{-2}(f)$, ce qui prouve $c_{-2}(f) = 0$.
   Par récurrence élémentaire, en prenant $n = -2p$, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ c_{-2p}(f) = 0}$
3. Il suffit de prendre $n = 2p$ dans la relation de récurrence...

6 Sixième question

1. Le théorème de d'Alembert s'applique parfaitement ici, les γ_n sont non nuls :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|b|}{4(n+1)^2} = 0$, d'où $\boxed{R = +\infty}$
2. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ est donc absolument convergente car elle correspond à $z = 1$. Et comme $|\exp(2inx)| = 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \exp(2inx)$ est aussi absolument convergente.
3. On écrit $\varphi(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \exp(2inx)$, et comme on peut dériver terme à terme, $\varphi''(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} -4n^2\gamma_n \exp(2inx)$.
   On injecte dans $\mathcal{E}_{0,b}$ et on obtient :
   $$\begin{aligned}
   &\sum_{n\in\mathbb{N}} -4n^2\gamma_n \exp(2inx) + b\exp(2ix) \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \exp(2inx)\\
   &= \sum_{n\in\mathbb{N}} -4n^2\gamma_n \exp(2inx) + b \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \exp(2i(n+1)x)\\
   &= \sum_{n\in\mathbb{N}} -4n^2\gamma_n \exp(2inx) + b \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \gamma_{n-1} \exp(2inx)\\
   &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} -4n^2\gamma_n \exp(2inx) + b \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \gamma_{n-1} \exp(2inx)\\
   &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(-4n^2\gamma_n + b\gamma_{n-1}\right) \exp(2inx) = 0
   \end{aligned}$$
   φ est donc bien solution de $\mathcal{E}_{0,b}$, non nulle, 2π périodique.

7 Septième question

On va écrire trois procédures Maple. On est surpris du fait que ce n'est pas le reste de la série qu'on majore mais le terme général... Ceci n'est pas très orthodoxe.

1. Calcul du premier rang tel que $|\gamma_n| \leqslant 10^{-m}$

   Il s'agit d'une simple boucle "tant que".

   ```
   rang:=proc(b,m)
   local n,gamma;
   gamma:=1;
   for n from 0 while gamma>10**(-m)
       do
       gamma:=b*gamma/(4*(n+1)**2)
       od;
   n
   end;
   ```

2. Calcul de la somme partielle. On la calculera comme une expression de la variable **libre** `t`. On pourra toujours au besoin retransformer cette expression en fonction, par `unapply` par exemple. On va utiliser la procédure précédente bien que ce ne soit pas une bonne solution du point de vue calcul, puisque les γ_n sont alors calculés deux fois...

   Il s'agit ici d'une boucle `for` puisqu'on connait le nombre d'itérations.

   ```
   somme:=proc(b,m);
   local n,gamma,k,S;
   global t;
   S:=0;gamma:=1;n:=rang(b,m)
   for k from 0 to n;
       do
       S:=S+gamma*exp(2*I*k*t);
       gamma:=b*gamma/(4*(k+1)**2)
       od;
   S
   end;
   ```

3. Pour la valeur approchée, on va utiliser l'expression précédente. Il n'est peut-être pas indispensable de l'écrire comme procédure... Il s'agit d'un simple appel à `evalf`.

   ```
   t:=x;evalf(somme(b,m));t:='t';
   ```

   On libère `t` ensuite. On aurait aussi pu utiliser `subs`...