1 Première Partie

1.

(a) $\lim_{k\to+\infty} A(k) = B \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|A(k) - B\| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \max_{i,j} |a_{i,j}(k) - b_{i,j}| = 0 \Leftrightarrow \forall i,j : \lim_{k\to+\infty} |a_{i,j}(k) - b_{i,j}| = 0$

Ceci est du au fait qu'on a un max, c'est à dire un nombre fini d'éléments.

On a bien sûr la même propriété pout toute suite de matrices ou vecteurs en dimension finie.

(b) $\lim_{k\to+\infty} A(k) = B \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} A(k)X = BX$ car les coordonnées de ces vecteurs sont des combinaisons linéaires identiques des coordonnées de $A(k)$ et de B.

Réciproquement, en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et enfin $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient la première colonne de $A(k)$ qui converge vers la première colonne de B, puis la même chose pour la seconde et la troisième.

(c) $\lim_{k\to+\infty} A(k) = B \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} A(k)C = BC$ car les coordonnées de ces matrices sont des combinaisons linéaires identiques des coordonnées de $A(k)$ et de B.

La réciproque est évidente en prenant $C = I$.

On a la même propriété à gauche par un raisonnement identique.

(d) Il s'agit simplement de la somme des coefficients correspondants. On aurait d'ailleurs pu faire une combinaison linéaire...

2.

(a) On a $(AB)_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j}$ et donc

$\left|(AB)_{i,j}\right| \leqslant 3 \max_{i,j} |a_{i,j}| \max_{i,j} |b_{i,j}|$ et enfin $\|AB\| \leqslant 3\|A\|\|B\|$.

On montre le résultat suivant par récurrence. L'amorce est évidente pour $k = 1$ car c'est une égalité.

Si on l'admet au rang k,

$\left\|A^{k+1}\right\| = \left\|A^kA\right\| \leqslant 3\left\|A^k\right\|\|A\| \leqslant 3 \times 3^{k-1}\|A\|^k\|A\| \leqslant 3^k\|A\|^{k+1}$, ce qui termine la récurrence.

(b) Si A est inversible, $AA^{-1} = I$ et $A^kA^{-k} = I$ aussi, au besoin par une récurrence très facile.

De plus, $\|I\| = 1$, d'où

$1 \leqslant 3\left\|A^k\right\|\left\|\left(A^{-1}\right)^k\right\| \leqslant 3\left\|A^k\right\|3^{k-1}\left\|A^{-1}\right\|^k = 3^k\left\|A^k\right\|\left\|A^{-1}\right\|^k$,

ce qui donne, en prenant la racine $k^{ème}$, $1 \leqslant 3\left\|A^k\right\|^{1/k}\left\|A^{-1}\right\|$, ce qui est le résultat demandé car tous les nombres sont positifs.

Si A est inversible et $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{3\left\|A^{-1}\right\|} = 0$, ce qui est impossible.

3.

(a) $(I-A)\sum\limits_{i=0}^{k} A^i = \sum\limits_{i=0}^{k} A^i - \sum\limits_{i=0}^{k} A^{i+1} = I - A^{k+1}$

$$\boxed{(I-A)\sum_{i=0}^{k} A^i = I - A^{k+1}}$$

(b) C'est la propriété déja vue au **1.b.** qui commence la question.

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (I-A)\sum\limits_{i=0}^{k} A^i = I$, ce qui prouve que $(I-A)\sum\limits_{i=0}^{k} A^i$ est inversible à partir d'un certain rang car son déterminant tend vers 1 et finit par être non nul. D'où $(I-A)$ est inversible et

$(I-A)\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{k} A^i = I$, c'est à dire $(I-A)^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{k} A^i$,

$$\boxed{(A-I)^{-1} = -\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} A^i}$$

Enfin, $\boxed{\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i = (I-A)^{-1}}$

4. Le premier résultat est celui de la question **1.c.** et le second résultat est le même en utilisant $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$, résultat très classique qui se montre encore au besoin par récurrence facile.

5.

(a) Soit λ, X un couple valeur propre, vecteur propre de A, $AX = \lambda X$ et facilement, $A^kX = \lambda^kX$ qui a pour limite BX non nul. Ce qui prouve que $\lambda = 1$.

On travaille sur les complexes, le polynôme caractéristique est scindé, 1 est valeur propre triple. Il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & k\beta + \frac{k(k-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & k\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par un calcul du type de la partie **II.**

$\lim\limits_{k\to+\infty} P^{-1}A^kP = P^{-1}BP$, ce qui prouve $\alpha = \gamma = 0$ puis $\beta = 0$. Ainsi, $P^{-1}AP = I$, $A = I$.

(b) On fait le même calcul qu'au début de la question précédente, mais on ne sait rien sur BX ce qui prouve que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

(c) A est diagonalisable et les valeurs propres vérifient $|\lambda| < 1$. On a une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$ de limite nulle. $P^{-1}BP = 0$, $B = 0$.

Si on peut avoir $\lambda = 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$ est diagonale, de diagonale formée de 1 et de 0, ce qui assure le résultat.

6. $A = PBP^{-1}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\left(PBP^{-1}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{PB^iP^{-1}}{i!} = P\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{B^i}{i!}\right)P^{-1}$

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} = \lim_{k\to+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{B^i}{i!}\right)P^{-1} = P \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{B^i}{i!} P^{-1} = P\exp(B)\,P^{-1}$.

Ce qui prouve que $\exp(A)$ existe et a la valeur indiquée.

$\boxed{\exp(A) = P\exp(B)\,P^{-1}}$

2 Deuxième Partie

1.

(a) On ne donne ici que les résultats que toute bonne calculatrice donne.

$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 3b^2 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}}$

$\boxed{Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}}$

(b) On utilise $k > 0$

$\boxed{D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}}$

Par une récurrence facile à écrire, ou en utilisant le même procédé que pour Q : $\boxed{M^k = \begin{pmatrix} ak & 0 & 0 \\ 0 & b^k & kb^{k-1} \\ 0 & 0 & b^k \end{pmatrix}}$

$Q^k = \left(aI + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^k$, a$I$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent,
la formule du binôme est appliquable, sels trois termes sont éventuellement non nuls.

$Q^k = a^k I + ka^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
valable aussi pour $k = 1$.

$$\boxed{Q^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}}$$

2.

(a) $\boxed{D^k \text{ a une limite pour } \begin{cases} |a| < 1 \text{ ou } a = 1 \\ |b| < 1 \text{ ou } b = 1 \\ |c| < 1 \text{ ou } c = 1 \end{cases}}$

$\boxed{M^k \text{ a une limite pour } \begin{cases} |a| < 1 \text{ ou } a = 1 \\ |b| < 1 \end{cases}}$

$\boxed{Q^k \text{ a une limite pour } |a| < 1}$

(b) $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} D^i = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & 0 & 0 \\ 0 & b^i & 0 \\ 0 & 0 & c^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a^i & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} b^i & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} c^i \end{pmatrix}$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} D^i = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-c} \end{pmatrix}}$$

(c) $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} M^i = I + \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & 0 & 0 \\ 0 & b^i & ib^{i-1} \\ 0 & 0 & b^i \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a^i & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} b^i & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} ib^{i-1} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} b^i \end{pmatrix}$

On reconnait la série dérivée de $\dfrac{1}{1-b}$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} M^i = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-b} & \dfrac{1}{(1-b)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-b} \end{pmatrix}}$$

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i = I + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & ia^{i-1} & \dfrac{i(i-1)}{2}a^{i-2} \\ 0 & a^i & ia^{i-1} \\ 0 & 0 & a^i \end{pmatrix}$

$$= I + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} a^i & \sum_{i=1}^{+\infty} ia^{i-1} & \sum_{i=2}^{+\infty} \dfrac{i(i-1)}{2}a^{i-2} \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} a^i & \sum_{i=1}^{+\infty} ia^{i-1} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} a^i \end{pmatrix}$$

On reconnait en plus ici la moitié de la dérivée seconde de $\dfrac{1}{1-a}$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{1}{(1-a)^2} & \dfrac{1}{(1-a)^3} \\ 0 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{1}{(1-a)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-a} \end{pmatrix}}$$

3. Le calcul montrera que chaque exponentielle existe.

$$\exp(D) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b^i}{i!} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(c) \end{pmatrix}}$$

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^i}{i!} = I + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{b^i}{i!} & \dfrac{b^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \dfrac{b^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= I + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^i}{i!} & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & \exp(b) \\ 0 & 0 & \exp(b) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(M) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & \exp(b) \\ 0 & 0 & \exp(b) \end{pmatrix}}$$

$$\exp(Q) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{Q^i}{i!} = I + Q + \sum_{i=2}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{a^i}{i!} & \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} & \frac{a^{i-2}}{2\,(i-2)!} \\ 0 & \frac{a^i}{i!} & \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \frac{a^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= I + Q + \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-2}}{2\,(i-2)!} \\ 0 & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(a) & \exp(a) & \frac{\exp(a)}{2} \\ 0 & \exp(a) & \exp(a) \\ 0 & 0 & \exp(a) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(Q) = \begin{pmatrix} \exp(a) & \exp(a) & \frac{\exp(a)}{2} \\ 0 & \exp(a) & \exp(a) \\ 0 & 0 & \exp(a) \end{pmatrix}}$$

3 Troisième Partie

1.

(a) N est nilpotente, d'où $N^p = 0$, les valeurs propres de N^p sont nulles, celles de N sont donc aussi nulles. Le spectre ne contient que 0. Comme on travaille sur les complexes, N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}N^2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P^{-1}N^3P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ et donc $N^3 = 0$.

Ce qui prouve enfin que N est nilpotente.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\left(A^2\right)^3 = A^6 = 0$. A est nilpotente,

$A^3 = 0 = A^4$.

Mais $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est non nul... D'où la contradiction.

(b) Avec les notations de la question précédente,

$P^{-1}\left(I - N\right)P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det\left(P^{-1}\left(I-N\right)P\right) = 1 = \det\left(I - N\right)$

$I - N$ est donc inversible. $\left(I - N\right)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} N^i = \sum\limits_{i=0}^{2} N^i = I + N + N^2$

$\boxed{\left(I - N\right)^{-1} = I + N + N^2}$

$P^{-1}\left(I - N\right)P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne les valeurs propres de $I - N$: 1 triple.

$\boxed{\text{1 est valeur propre unique de } I - N}$

Si $I - N$ était diagonalisable, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 serait de dimension 3, c'est à dire $I - N$ serait égal à I. Elle n'est donc pas diagonalisable.

(c) Toujours avec les mêmes notations, $P^{-1}N^2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nul donc $\alpha\gamma$ n'est pas nul.

Soit $X = P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$NX = P\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

$N^2X = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base car α et γ ne sont pas nuls.

Il en est de même de $P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}\beta\\\gamma\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\0\\0\end{pmatrix}$ car P est inversible.

Si $A = aI + bN + cN^2$, $AN = aN + bN^2 + cN^3 = NA$.

Réciproquement, dans la base X, NX, N^2X, P la matrice de passage,

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, $N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

On a $A'N' = N'A'$, ce qui donne :

$\begin{pmatrix} b & c & 0\\ e & f & 0\\ h & i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ et donc

$b = c = f = 0$, $a = e = i$, $d = h$, ce qui donne

$A' = \begin{pmatrix} a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix} = aI + dN' + gN'^2$, et enfin

$A = aI + dN + gN^2$, ce qui est le résultat demandé.

2.

(a) $(N_1N_2)^3 = N_1N_2N_1N_2N_1N_2 = N_1^3N_2^3 = 0$, N_1N_2 est nilpotente.
$(N_1+N_2)^5 = N_1^5 + 5N_1^4N_2 + 10N_1^3N_2^2 + 10N_1^2N_2^3 + 5N_1N_2^4 + N_2^5 = 0$
$N_1 + N_2$ est nilpotente.

(b) $(N_1+N_2)^3 = N_1^3 + 3N_1^2N_2 + 3N_1N_2^2 + N_2^3 = 3\left(N_1^2N_2 + N_1N_2^2\right) = 0$
On a bien : $N_1^2N_2 + N_1N_2^2 = 0$
$(N_1+N_2)^4 = N_1^4 + 4N_1^3N_2 + 6N_1^2N_2^2 + 4N_1N_2^3 + N_2^4 = 6N_1^2N_2^2 = 0$
On a bien : $N_1^2N_2^2 = 0$

(c) $\exp(N_1+N_2) = I + (N_1+N_2) + \dfrac{(N_1+N_2)^2}{2}$
$= I + N_1 + N_2 + \dfrac{N_1^2 + 2N_1N_2 + N_2^2}{2}$
$\exp(N_1)\exp(N_2) = \left(I + N_1 + \dfrac{N_1^2}{2}\right)\left(I + N_2 + \dfrac{N_2^2}{2}\right)$
$= I + N_1 + \dfrac{N_1^2}{2} + N_2 + N_1N_2 + \dfrac{N_1^2N_2}{2} + \dfrac{N_2^2}{2} + \dfrac{N_1N_2^2}{2} + \dfrac{N_1^2N_2^2}{4}$
$= I + N_1 + \dfrac{N_1^2}{2} + N_2 + N_1N_2 + \dfrac{N_2^2}{2}$ en utilisant la question précédente.
Et enfin, $\exp(N_1+N_2) = \exp(N_1)\exp(N_2)$

(d) $\exp(N) = I + N + \dfrac{N^2}{2}$

$\exp(N)$ est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \dfrac{\alpha\gamma}{2} \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien inversible.

On peut penser que comme $\exp(N)$ commute avec N, son inverse commute aussi avec N, c'est d'ailleurs facile à montrer. On cherche donc $(\exp(N))^{-1}$ sous la forme $aI + bN + cN^2$

$\left(I + N + \dfrac{N^2}{2}\right)\left(aI + bN + cN^2\right) = I$

$(a-1)\,I + (a+b)\,N + \left(\dfrac{a}{2} + b + c\right) N^2 = 0$

Ces trois matrices forment une famille libre : $\left\{ \begin{array}{r} a - 1 = 0 \\ a + b = 0 \\ \dfrac{a}{2} + b + c = 0 \end{array} \right.$

Et enfin : $\left\{ \begin{array}{r} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$ $\boxed{(\exp(N))^{-1} = I - N + \dfrac{N^2}{2}}$

On remarque aussi que c'est $\exp(-N)$ ...

3.

(a) On calcule facilement $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0}$

(b) $\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} N^i = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ qui est aussi l'inverse de $I - N$

(c) $\boxed{\exp(N) = I + N + \dfrac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\exp(-N) = I - N + \dfrac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

4 Quatrième Partie

1.

(a) Toute bonne calculatrice fournit :

$\boxed{-3\text{, valeur propre simple, } 3\text{, valeur propre double}}$

(b) $\boxed{R \text{ est diagonalisable}}$ car $\mathcal{E}_3$ est de dimension 2.

On écrit une base de chaque sous-espace propre :

$$\boxed{\mathcal{E}_{-3} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{E}_3 : \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

$\exp(D)$ existe donc $\exp(R)$ existe aussi,

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(3) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(3) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-3) \end{pmatrix}$$

On prend $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $R = PDP^{-1}$,

et donc $\exp(R) = P\exp(D)P^{-1}$

$$\boxed{\exp(R) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^3 + e^{-3} & -e^3 + e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} \\ -e^3 + e^{-3} & 5e^3 + e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} \\ 2e^3 - 2e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} & 2e^3 + 4e^{-3} \end{pmatrix}}$$

2.

(a) $\boxed{1 \text{ est valeur propre simple, } -1 \text{ est valeur propre double}}$

(b) $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$ car $\mathcal{E}_{-1}$ n'est pas de dimension 2.

On écrit une base de chaque sous-espace propre :

$$\boxed{\mathcal{E}_1 : U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathcal{E}_{-1} : V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(c) On résout $(M + I)\,W = V$, on trouve $\boxed{W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $(+\lambda V)$

Pour avoir $M = PTP^{-1}$, on prend $\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$\exp(T)$ existe d'après la partie **II,** donc $\exp(M)$ existe aussi.

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp(M) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e - e^{-1} & 3e - 5e^{-1} & e^{-1} \\ e + e^{-1} & e + 5e^{-1} & -e^{-1} \\ 2e - 2e^{-1} & 2e - 2e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}}$$