Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Les parties I, II, à l'exclusion de la question 2. d., et III peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. Enoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe C^n sur I, au voisinage de a.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie I

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5\,x^2}{12 + x^2} \quad , \quad \psi(x) = 1 - \frac{6\,x^2}{12 + x^2}$$

1. Etudier la parité de la fonction ϕ. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. Développer en série entière, sur un domaine que l'on précisera, la fonction ϕ.
6. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54$$

   Tracer, sur un même graphique, sur la feuille de papier millimétré fournie, avec l'échelle : 3 cm pour une unité, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ? Donner, à l'aide de la question précédente, une interprétation.

Partie II

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2\,x) = h(x)\,\cos(\pi\,x)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2\,a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$\sin(\pi\,x) = 2^n\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi\,x}{2^k}\right)$$

3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,x}{2^n}\right)\ldots\cos\left(\frac{\pi\,x}{2^2}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x)\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\,h\left(\frac{x}{2^n}\right)\,\sin(\pi\,x)$$

5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi\,x}{2^n}\right)}$$

7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Partie III

1. Etudier la convergence de la série de terme général :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$$

2. On considère la suite $(R_n)_{n\geq 2}$, de premier terme $R_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$R_n = R_{n-1}\,\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

(a) Calculer, pour tout entier $n \geq 4$, et de deux façons différentes :

$$\sum_{k=4}^{n} \{\ln R_k - \ln R_{k-1}\}$$

(b) La suite $(\ln R_n)_{n\geq 2}$ est-elle convergente ?

(c) Justifier l'existence de :

$$R = \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

On écrira, dans ce qui suit :

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

(d) A l'aide des résultats de la Partie I, proposer une méthode de calcul permettant d'obtenir une valeur approchée de R.

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1, i.e. : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.

(b) En déduire, pour tout t de $]0,1]$, l'expression de :

$$\frac{1-(1-t)^n}{t}$$

en fonction d'une somme.

(c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\, dt$$

Etudier la convergence de l'intégrale I_n.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n\,(n+t)}\, dt$$

(a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.

(b) Etudier la convergence de la série de terme général u_n.

(c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}$$

5. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

(a) Etudier, pour tout entier naturel non nul n la continuité et la dérivabilité de G_n (pour la dérivabilité, on commencera par se placer sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$).

(b) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(1)$.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x :

$$G_n(x) = \frac{n^x\, n\,!}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}$$

(On pourra utiliser des intégrations par parties.)

(d) Etudier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right\}$$

(e) En déduire, pour tout réel $x > 0$, la convergence de :

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\}$$

(f) Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{x}\, e^{-\gamma\, x} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \right\} = \frac{1}{x}\, e^{-\gamma\, x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \right\}$$

(g) Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$H(x) = x\, e^{\gamma\, x} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\} = x\, e^{\gamma\, x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right\}$$

Montrer que, pour tout réel $x \in]0, 1[$:

$$H(x+1)\, H(1-x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{H(x+1)}{H(x)} = \frac{1}{x}\,\cdot$$

Si on considère un cercle unité C_1, et que l'on y inscrit un triangle équilatéral, à l'intérieur duquel on inscrit un cercle, C_2, à l'intérieur duquel on inscrit un triangle équilatéral, puis un cercle, puis un carré, à nouveau un cercle à l'intérieur du carré, puis un pentagone régulier à l'intérieur de ce cercle, ... en répétant à l'infini ce procédé, on s'aperçoit que les rayons des cercles C_n inscrits ainsi obtenus ont une limite finie, qui est la constante de Kepler-Bouwkamp :

$$\prod_{k=3}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{k}$$

et dont l'on doit l'origine à Johannes Kepler, qui pensait initialement que les orbites de Jupiter et Saturne autour du soleil pouvaient être approchées par des cercles de type C_1 et C_2, celle de Mars, de type C_3, celle de la Terre, de type C_4, etc ...

Pour calculer une valeur approchée de cette constante, on peut utiliser, comme dans le problème, une approximation de Padé, très utile dès que l'on considère des systèmes dynamiques, comme, justement, en astronomie. De façon amusante, si l'on considère un produit infini avec cette approximation, on obtient une expression faisant intervenir la fonction Gamma, Γ, historiquement définie par Leonhard Euler comme la limite donnée en question III. 5. c., et redéfinie ensuite par Karl Weierstrass par la formule donnée en question III. 5. f. En partie III, on obtient également le lien entre la fonction Gamma et la fonction sinus, par une formule dite « de réflexion », la fonction h recherchée étant telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : \quad h(x) = x\,\Gamma(1-x)\,\Gamma(x)$$

Fin de l'épreuve