CPGE PT 2019/2020 **Nathalie Planche**
Lycée Jean Zay **Mathématiques**

Banque PT Maths C 2020 : proposition de corrigé

Préambule

1. Théorème de Taylor-Young: Si n est un entier naturel non nul, si f est une fonction de classe C^n sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, si $a \in I$, alors:

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)}$$

2. Si on applique ce théorème à la fonction cosinus qui est de classe C^2 sur $I = \mathbb{R}$, au voisinage de $a = 0$, alors ayant $cos(0) = 1$, $cos'(0) = -sin(0) = 0$ et $cos''(0) = -cos(0) = -1$, on peut donc affirmer que:
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0\left(x^2\right)}$$

Partie I

1. Il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(-x) = \phi(x)$, donc $\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est paire.}}$
On en déduit qu'**il suffit d'étudier la fonction sur $[0; +\infty[$**, et dans un repère orthonormé, **sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

2. On a très facilement, pour tout réel x, $1 - \dfrac{6x^2}{12+x^2} = \dfrac{12 + x^2 - 6x^2}{12+x^2} = \dfrac{12-5x^2}{12+x^2}$, c'est-à-dire $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \psi(x)}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = \psi'(x) = -\dfrac{12x(12+x^2) - 6x^2(2x)}{(12+x^2)^2} = \dfrac{-144x}{(12+x^2)^2}$

4. Pour tout réel positif x, $\phi'(x) \leq 0$ et ϕ est paire.
D'autre part, on a immédiatement $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = -5$ (car un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de l'infini).

On a donc le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

5. Pour tout réel x, $\phi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

   Or $\forall |u| < 1, \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$, donc $\forall |u| < 1, \frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n}$.

   En appliquant cette formule pour $u = \frac{x}{2\sqrt{3}}$, on en déduit que

   $\forall x \in \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[, \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{12}\right)^n x^{2n}$.

   Finalement, $\boxed{\forall x \in \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[, \phi(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{12}\right)^n x^{2n+2}}$.

6. Remarquons que les deux valeurs approchées données sont là pour nous aider dans notre tracé. L'utilité de la valeur approchée de $\phi(\pi)$ est évidente, détaillons à quoi nous sert la valeur approchée de $2\sqrt{\frac{3}{5}}$:

   Il est naturel, pour effectuer le tracé, de se demander quelles valeurs annulent la fonction ϕ.

   Or: $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{5} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $x = -2\sqrt{\frac{3}{5}}$

   On obtient donc la figure suivante:

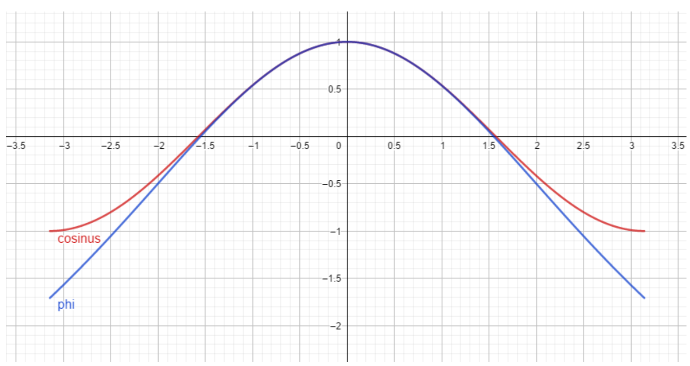

Figure 1: Représentation graphique des fonctions ϕ et cos

On remarque que les deux courbes sont très proches au voisinage de 0. Si on regarde les premiers termes du développement en série entière de la fonction ϕ, qui correspondent aux termes qui apparaissent dans le développement limité en 0 de cette fonction, alors on a:

- $\phi(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$

$\boxed{\text{Les deux fonctions ont le même développement limité à l'ordre 4}}$.

Partie II

1. C'est une question de cours: $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, sin(2a) = 2cos(a)sin(a)}$.

2. Soit la propriété $\mathcal{P}_n$: "$\forall x \in \mathbb{R}, sin(\pi x) = 2^n sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$".

   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul:

   - **Initialisation:** D'après la formule de duplication rappelée à la question 1., pour tout réel x on a : $sin(\pi x) = 2sin(\frac{\pi x}{2})cos(\frac{\pi x}{2})$, donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
   - **Hérédité:** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors:

   $$\begin{aligned} sin(\pi x) &= 2^n sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2^n 2sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ d'après la formule de duplication} \\ &= 2^{n+1} sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ cqfd} \end{aligned}$$

   - **Conclusion:** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, sin(\pi x) = 2^n sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$

3. Soit h une solution du problème, c'est-à-dire que h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $h(0) = 1$, et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, h(2x) = h(x)cos(\pi x)$.

   Soit la propriété $\mathcal{Q}_n$: "$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$".

   Montrons par récurrence que $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul:

   - **Initialisation:** Si x est un réel et que l'on applique l'hypothèse sur h au réel $\frac{x}{2}$, alors $h(x) = h(\frac{x}{2})cos(\frac{\pi x}{2})$, donc la propriété $\mathcal{Q}_1$ est vérifiée.
   - **Hérédité:** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors:

   $$\begin{aligned} h(x) &= h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ d'après l'hypothèse sur } h \text{ appliquée à } \frac{x}{2^n} \\ &= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ cqfd} \end{aligned}$$

   - **Conclusion:** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$

4. Soit x réel et n entier naturel non nul. D'après la question 3., $h(x)sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$

   En utilisant à présent la question 2., on peut alors affirmer que $\boxed{h(x)sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) sin(\pi x)}$.

5. La fonction h est continue en 0 et $h(0)=1$, on a donc $\lim_{u\to 0} h(u)=1$.

   Si x est un réel fixé non nul, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n}=0$, donc par composition des limites on a: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)=1}$.

6. Soit x un réel fixé non nul. Remarquons que pour n entier naturel suffisamment grand on a bien $sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)$ non nul: en effet comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi x}{2^n}=0$, alors à partir d'un certain rang: $\frac{\pi x}{2^n}\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

   Il est donc légitime de considérer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$

   On a $\frac{1}{2^n}\frac{x}{sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)} = \frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}{sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$ et en exploitant la limite classique $\lim_{u\to 0}\frac{sin(u)}{u}=1$, on peut donc affirmer que: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}=\frac{1}{\pi}}$.

7. Soit x un réel non nul fixé. Soit n un entier suffisamment grand pour que $sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\neq 0$.

   On a donc, d'après la question 4., $h(x)=\frac{1}{2^n}\frac{x}{sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{sin(\pi x)}{x}$ On passe alors à la limite dans le terme de droite lorsque n tend vers l'infini (à gauche $h(x)$ est une constante), et en exploitant les résultats des questions 5. et 6., on a donc $h(x)=\frac{sin(\pi x)}{x}$.
   Finalement il ne reste plus qu'à utiliser l'hypothèse $h(0)=1$ pour conclure la question:
   $\boxed{\text{Si x est un réel non nul: } h(x)=\frac{sin(\pi x)}{\pi x}\text{ , et si } x=0\text{: } h(x)=1}$.

   Remarque: Ce n'était pas demandé (et donc pas attendu des étudiants) mais par rapport à l'objectif de cette partie II énoncé au début, nous sommes tentés de vérifier que réciproquement, la fonction h définie par $h(x)=\frac{sin(\pi x)}{\pi x}$ *si* $x\neq 0$ *et* $h(0)=1$ *est bien une solution du problème posé. Ceci est vrai car cette fonction est bien continue en 0 grâce à la limite classique rappelée précédemment, et pour tout réel* x, $\frac{sin(2\pi x)}{2\pi x}=\frac{sin(\pi x)}{\pi x}cos(\pi x)$, *donc* $h(2x)=h(x)cos(\pi x)$ *si* x *est non nul, et si* $x=0$ *cette égalité est vraie aussi car* $1=1\times cos(0)$.

Partie III

1. Posons, pour tout entier naturel n, $w_n=ln\left(cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$
   Remarquons que l'on a immédiatement $\lim_{n\to+\infty} w_n=ln(1)=0$, ce qui nous permet de dire que la série de terme général w_n ne diverge pas grossièrement.
   Nous allons utiliser des développements limités pour obtenir un équivalent simple de w_n au voisinage de $+\infty$.
   Le développement limité de $cos(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 a été rappelé dans le préambule, et on sait qu'au voisinage de 0, $ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}+o_0(u^2)$.
   On peut donc écrire, pour n au voisinage de $+\infty$: $cos(\frac{\pi}{n+1})=1-\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Donc $w_n = ln\left(1 - \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)$, et par composition des développements limités:
$w_n = -\frac{\pi^2}{2(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Donc au voisinage de $+\infty$, w_n est équivalent à $-\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}$, donc aussi à $-\frac{\pi^2}{2n^2}$.
On utilise alors **le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes constants** (ici négatifs), et le fait que la série de terme général $-\frac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente (car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente), pour conclure finalement que:

$$\boxed{\text{la série de terme général } ln\left(cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \text{ est convergente.}}$$

2. *Remarque: après avoir défini la suite $(R_n)_{n\geq 2}$, l'énoncé manipule le logarithme népérien des termes de cette suite. On pourrait vérifier que ceci est bien valide en montrant par exemple par récurrence que $\forall k \geq 2, R_k > 0$. Mais je pense que cette vérification n'était pas attendue des candidats.*

   (a) Soit n un entier tel que $n \geq 4$. Transformons de deux façons la somme proposée:

   - $\sum_{k=4}^{n}(ln(R_k) - ln(R_{k-1})) = \sum_{k=4}^{n} ln(R_k) - \sum_{k=4}^{n} ln(R_{k-1}) = \boldsymbol{ln(R_n) - ln(R_3)}$ car il s'agit de sommes télescopiques.
   - $\sum_{k=4}^{n}(ln(R_k) - ln(R_{k-1})) = \sum_{k=4}^{n} ln\left(\frac{R_k}{R_{k-1}}\right) = \boldsymbol{\sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)}$

   (b) D'après la question précédente, $\forall n \geq 4, ln(R_n) = ln(R_3) + \sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$.

   Or d'après la question 1. de cette partie III, la série de terme général $ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$ converge , donc la somme partielle $\sum_{k=4}^{n} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
   On a donc $ln(R_n)$ qui admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

   $$\boxed{\text{la suite } (ln(R_n))_{n\geq 2} \text{ est convergente.}}$$

   (c) Intéressons nous au logarithme népérien du produit proposé:
   $ln\left(\prod_{k=3}^{N} cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) = \sum_{k=3}^{N} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right) = \sum_{n=2}^{N-1} ln\left(cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$
   C'est la somme partielle de la série convergente étudiée à la question 1., elle admet donc une limite fine α lorsque n tend vers $+\infty$.
   Par composition avec la fonction exponentielle, on a donc:

   $$\boxed{\prod_{k=3}^{N} cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \text{ tend vers } R = e^{\alpha} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

   (d) *Il est difficile de comprendre ce qui est attendu à cette question. J'ai supposé que l'on attendait une utilisation de la fonction ϕ pour approcher les valeurs du cosinus.*
   $\prod_{k=3}^{N} cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ est approché par $\prod_{k=3}^{N} \phi\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{N} \frac{12k^2 - 5\pi^2}{12k^2 + \pi^2}$
   En choisissant d'approcher π par $3,14$, on obtient alors les valeurs approchées de R suivantes:

   - pour $N = 3$: 0.45
   - pour $N = 4$: 0.37
   - pour $N = 5$: 0.34

3. (a) D'après le cours on sait que: $\boxed{\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$

   (b) Soit $t \in]0,1]$, on applique cette formule avec $q = 1-t$ qui est bien différent de 1, donc: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k = \frac{1-(1-t)^n}{t}}$

   (c) Cette intégrale est une intégrale impropre en 0.
   Or $\lim_{t\to 0} \frac{1-(1-t)^n}{t} = \lim_{t\to 0} \sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$
   La fonction sous l'intégrale admet une limite finie lorsque t tend vers 0, l'intégrale est donc **faussement impropre en 0**, et finalement $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est une intégrale convergente.}}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k dt$ par linéarité de l'intégrale.
   Donc $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{-(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$
   Il suffit alors de faire un changement d'indice pour conclure: $\boxed{I_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}dt = \int_0^1 \frac{(t+n)-n}{n(n+t)}dt = \int_0^1 \left(\frac{(t+n)}{n(n+t)} - \frac{n}{n(n+t)}\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right) dt = \left[\frac{t}{n} - ln(|t+n|)\right]_0^1$
   Finalement on obtient: $\boxed{u_n = \frac{1}{n} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n} - ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

   (b) Déterminons un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$:
   $u_n = \frac{1}{n} - ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   Donc au voisinage de $+\infty$, u_n est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$.
   On utilise alors **le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes positifs** , et le fait que la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ est convergente (car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente), pour conclure finalement que:
   $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est convergente.}}$

   (c) Intéressons-nous à la somme partielle de la série de terme général u_n. Si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - ln(k+1) + ln(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1) - ln(1) \text{ car les deux dernières sommes se télescopent.} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)
\end{aligned}$$

   Or $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - ln(n)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)\right) + ln(n+1) - ln(n) = \sum_{k=1}^{n} u_k + ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   On constate que:

- $\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ en tant que somme partielle de la série de terme général u_n qui converge.
- $ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Finalement on en déduit l'existence du réel: $\boxed{\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln(n)\right)}$.

5. (a) *Remarque: l'indication donnée par l'énoncé est fausse. Il est en effet ici impossible d'utiliser le théorème de dérivabilité pour les intégrales à paramètres du programme de PT si on se place sur un intervalle du type $[a;+\infty[$. De plus l'énoncé laisse penser qu'il n'y aurait que pour la preuve de la dérivabilité de G qu'il faudrait passer par une domination locale, or c'est nécessaire aussi pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.*
Je choisis ici de prouver d'abord la continuité de la fonction avant de prouver sa dérivabilité, car c'est ce que l'énoncé semble suggérer. De plus l'hypothèse de domination est légèrement plus facile à prouver dans le théorème de continuité, bien qu'à mon avis sans indications la difficulté est très importante pour un(e) étudiant(e) de PT.

Etape 1: Montrons la continuité de G_n sur un intervalle $[a, b]$, où $0 < a < b$. Nous allons appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
Pour cela notons

$$\begin{aligned} f : D = [a, b]\times]0, n] &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} = (1-\frac{t}{n})^n e^{(x-1)ln(t)} \end{aligned}$$

Alors:

- La fonction f est continue sur $[a, b]\times]0, n]$ par produit et composée de fonctions continues.
- Hypothèse de domination: On cherche une fonction ϕ continue et intégrable sur $]0, n]$ telle que $\forall(x, t) \in D, |f(x, t)| \le \phi(t)$
  On a $\forall(x, t) \in D, |(1-\frac{t}{n})^n e^{(x-1)ln(t)}| \le e^{(x-1)ln(t)}$
  Pour poursuivre la majoration, nous devons alors distinguer le cas $t \in]0, 1]$ et le cas $t \in]1, n]$
  - Si $t \in]0, 1]$, alors $ln(t) \le 0$, donc $a \le x \le b \Rightarrow e^{(x-1)ln(t)} \le e^{(a-1)ln(t)} = \frac{1}{t^{1-a}} = \phi_a(t)$
  - Si $t \in [1; +\infty[$, alors $ln(t) \ge 0$, donc $a \le x \le b \Rightarrow e^{(x-1)ln(t)} \le e^{(b-1)ln(t)} = \frac{1}{t^{1-b}} = \phi_b(t)$

  On pose alors $\boldsymbol{\forall t \in]0, n], \phi(t) = \phi_a(t) + \phi_b(t)}$
  On a bien:
  - ϕ est continue sur $]0, n]$ comme somme de fonctions continues.
  - ϕ est intégrable sur $]0, n]$ car comme $1-a < 1$ et $1-b < 1$, $\int_0^n \frac{dt}{t^{1-a}}$ et $\int_0^n \frac{dt}{t^{1-b}}$ sont deux intégrales de Riemann convergentes.
  - Comme $\forall t \in]0, n], \phi_a(t) \le \phi(t)$ et $\forall t \in]0, n], \phi_b(t) \le \phi(t)$, on peut affirmer que: $\forall(x, t) \in D, |f(x, t)| \le \phi(t)$

  L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on peut donc affirmer que:

- $\forall x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, n]$
- La fonction $G_n : x \mapsto \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$ est continue sur $[a, b]$.

<u>Etape 2</u>: **Montrons la dérivabilité de G_n sur un intervalle $[a, b]$, où $0 < a < b$.**
Nous allons appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.
Pour cela nous allons garder la notation:

$$f : D = [a, b]\times]0, n] \to \mathbb{R}$$
$$(x, t) \mapsto (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} = (1 - \frac{t}{n})^n e^{(x-1)ln(t)}$$

Alors:

- Pour tout $x \in [a, b]$, l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1}$ sur $]0, n]$ a été prouvée dans l'étape 1

$\forall (x, t) \in D, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (1 - \frac{t}{n})^n ln(t)e^{(x-1)ln(t)}$

- La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b]\times]0, n]$ par produit et composée de fonctions continues.
- Hypothèse de domination: On cherche une fonction ψ continue et intégrable sur $]0, n]$ telle que $\forall (x, t) \in D, |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \psi(t)$
  On a $\forall (x, t) \in D, |(1 - \frac{t}{n})^n ln(t)e^{(x-1)ln(t)}| \leq |ln(t)|e^{(x-1)ln(t)}$
  Pour poursuivre la majoration, nous devons alors distinguer le cas $t \in]0, 1]$ et le cas $t \in]1, n]$
  - Si $t \in]0, 1]$, alors $ln(t) \leq 0$, donc
    $a \leq x \leq b \Rightarrow |ln(t)|e^{(x-1)ln(t)} \leq |ln(t)|e^{(a-1)ln(t)} = -ln(t)\frac{1}{t^{1-a}} = \psi_a(t)$
  - Si $t \in [1; +\infty[$, alors $ln(t) \geq 0$, donc
    $a \leq x \leq b \Rightarrow |ln(t)|e^{(x-1)ln(t)} \leq |ln(t)|e^{(b-1)ln(t)} = ln(t)\frac{1}{t^{1-b}} = \psi_b(t)$

  On pose alors $\boldsymbol{\forall t \in]0, n], \psi(t) = \psi_a(t) + \psi_b(t)}$
  On a bien:
  - ψ est continue sur $]0, n]$ comme somme de fonctions continues.
  - Montrons que ψ est intégrable sur $]0, n]$ en montrant que ψ_a et ψ_b sont intégrables sur $]0, n]$. Remarquons que $ln(t)\frac{1}{t^{1-a}} = o_0\left(\frac{1}{t^{1-a/2}}\right)$ car $\frac{ln(t)\frac{1}{t^{1-a}}}{\frac{1}{t^{1-a/2}}} = ln(t)t^{a/2}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par croissance comparée.
    D'après le théorème de comparaison "version petitô" et le fait que $\int_0^n \frac{dt}{t^{1-a/2}}$ soit une intégrale de Riemann convergente, on peut affirmer que ψ_a est intégrable sur $]0, n]$.
    On montre de même que ψ_b est intégrable sur $]0, n]$.
  - Comme $\forall t \in]0, n], \psi_a(t) \leq \psi(t)$ et $\forall t \in]0, n], \psi_b(t) \leq \psi(t)$, on peut affirmer que:
    $\forall (x, t) \in D, |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \psi(t)$

  L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on peut donc affirmer que:

$$\boxed{\text{La fonction } G_n : x \mapsto \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ (donc en particulier dérivable) sur } [a, b].}$$

<u>Etape 3</u>: **Montrons la dérivabilité (et par conséquent la continuité) de G_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**
Si x_0 est un réel de $]0, +\infty[$, alors il existe deux réels a et b tels que $0 < a < x_0 < b$. D'après l'étape 2, la fonction G_n étant dérivable sur $[a, b]$, elle est en particulier dérivable en x_0. Bilan: La fonction G_n est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$, donc

$$\boxed{G_n \text{ est dérivable (donc continue) sur }]0, +\infty[.}$$

(b) $G_n(1) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \left[\frac{-n}{n+1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1}$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} G_n(1) = 1}$.

(c) *Je propose deux méthodes pour traiter cette question: la première utilise des intégrations par parties successives, c'est celle que l'énoncé attendait je suppose. La deuxième, plus rigoureuse à mon sens, utilise une récurrence. Cependant pour effectuer cette récurrence j'ai tout d'abord ramené les bornes de l'intégrale définissant G_n à 0 et 1.*

Méthode 1: Par intégrations par parties successives

Soit n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

Effectuons une intégration par parties sur $G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ en posant:

$$u_1(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \qquad u_1'(t) = -\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$$

$$v_1'(t) = t^{x-1} \qquad v_1(t) = \frac{t^x}{x}$$

Les fonctions u_1 et v_1 sont bien de classe C^1 sur $]0, n]$, on a alors:

$G_n(x) = \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\right]_0^n + \frac{1}{x}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x dt = \frac{1}{x}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x dt$

Réalisons à nouveau le même type d'intégration par parties,

$$u_2(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \qquad u_2'(t) = -\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2}$$

$$v_2'(t) = t^x \qquad v_2(t) = \frac{t^{x+1}}{x+1}$$

Les fonctions u_2 et v_2 sont bien de classe C^1 sur $]0, n]$, on a alors:

$G_n(x) = \frac{1}{x}\left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^n + \frac{1}{x(x+1)}\frac{n-1}{n}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} dt$

$G_n(x) = \frac{1}{x(x+1)}\frac{n-1}{n}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} dt$

On continue de la même manière jusqu'à obtenir:

$G_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^0 t^{x+n-1} dt$

On a donc $G_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\left[\frac{t^{x+n}}{x+n}\right]_0^n = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\frac{n^{x+n}}{x+n}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par n, et enfin en simplifiant les puissances de n, on obtient finalement:

$$\boxed{G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}.$$

Méthode 2: En se ramenant à une intégrale entre 0 et 1 et en effectuant une récurrence

Soit n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ nous permet immédiatement d'obtenir:

$$\boldsymbol{G_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du}$$

Soit la propriété $\mathcal{T}_n$: "$\forall x > 0, G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$".

Montrons par récurrence que $\mathcal{T}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul:

- **Initialisation:** Si $x > 0$, alors :

$G_1(x) = \int_0^1 (1-u)u^{x-1}du = \int_0^1 (u^{x-1} - u^x)du = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

Or si $n=1$, $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x(x+1)}$, donc la propriété $\mathcal{T}_1$ est vérifiée.

- **Hérédité:** Supposons que la propriété est vraie à un certain rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $x>0$. On a alors: $G_{n+1}(x) = (n+1)^x \int_0^1 (1-u)^{n+1}u^{x-1}du$

  Effectuons une intégration par parties,

$$w(u) = (1-u)^{n+1} \qquad w'(u) = -(n+1)(1-u)^n$$
$$v'(u) = u^{x-1} \qquad v(u) = \frac{u^x}{x}$$

  Les fonctions w et v sont bien de classe C^1 sur $]0,1]$, on a alors:

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= (n+1)^x \left[(1-u)^{n+1}\frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 (1-u)^n u^x du \\
&= \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 (1-u)^n u^x du \\
&= \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}((u-1)+1) du \\
&= -\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 (1-u)^{n+1} u^{x-1} du + \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \\
&= -\frac{n+1}{x}G_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\frac{1}{n^x}G_n(x)
\end{aligned}$$

  On a donc $\frac{x+n+1}{x}G_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\frac{1}{n^x}G_n(x)$, d'où $G_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^{x+1}}{n^x(x+n+1)}G_n(x)$.

  On applique alors l'hypothèse de récurrence $G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$,

  donc $G_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^{x+1}(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}$, cqfd.

- **Conclusion:** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.}$

(d) *L'énoncé est mal formulé car il demande de montrer la convergence d'une expression qui est déjà une limite. Nous pourrions le reformuler en:*

"Etudier la convergence de la série de terme général $ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$ *"*

Soit x un réel strictement positif fixé. On a alors, pour k au voisinage de $+\infty$:

$ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} = \frac{x}{k} - \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{x^2}{k^2}\right) - \frac{x}{k} = -\frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{x^2}{k^2}\right)$

Cette expression, au voisinage de $+\infty$, est équivalente à $-\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{k^2}$ et est négative.

On utilise alors **le critère d'équivalence pour les séries numériques à termes de signes constants** (ici négatifs), et le fait que la série de terme général $-\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, pour conclure finalement que:

$$\boxed{\text{la série de terme général } ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \text{ est convergente.}}$$

(e) *Là encore, l'énoncé est mal formulé, nous pourrions le reformuler en:*

"Etudier la convergence de $\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)$ *"*

Remarquons que $ln\left(\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\dfrac{x}{k}}\right)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$ qui tend vers une limite finie β lorsque N tend vers $+\infty$ d'après la question précédente (somme partielle d'une série convergente).

Donc, en composant par la fonction exponentielle, on peut affirmer que :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{N}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\dfrac{x}{k}}\right) \text{ tend vers une limite finie lorsque } N \text{ tend vers } +\infty}$$

(f) Nous allons transformer l'expression de $G_n(x)$ obtenue à la question 5.c).

Soit x un réel strictement positif fixé et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= \frac{n^x}{x\dfrac{x+1}{1}\dfrac{x+2}{2}\cdots\dfrac{x+n}{n}} \\
&= \frac{n^x}{x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} \\
&= \frac{e^{xln(n)}}{x}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x}{k}}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x}{k}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} \\
&= \frac{e^{-x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-ln(n)\right)}}{x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\dfrac{x}{k}}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\dfrac{x}{k}}\right)$ tend vers une limite finie non nulle (nous l'avions notée e^{β}) lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\dfrac{x}{k}}$ tend vers une limite finie non nulle (qui est $e^{-\beta}$) lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus, en 4.c), nous avons montré que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln(n)$ tend vers une limite notée γ.

On peut donc conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}G_n(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}}$

(g) *Même si je ne suis pas sûre que ce soit attendu des candidats (l'énoncé semble l'admettre de façon implicite), nous allons nous assurer tout d'abord de l'existence du produit infini* $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$

Pour tout entier naturel n non nul, notons $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$

$ln(P_n)=\sum_{k=1}^{n}ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$, or $ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ est équivalent à $\frac{x^2}{k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente à termes positifs. Grâce au critère d'équivalence, on conclut que la série de terme général $ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ est convergente, donc la somme partielle $ln(P_n)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, donc par composition avec l'exponentielle, il en est de même de P_n, et finalement: $\boxed{\text{le produit infini } \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \text{ existe bien.}}$

Revenons à présent à la preuve des deux égalités demandées.
Remarquons que l'on a immédiatement, pour tout $x > 0$, par définition de $H(x)$,
$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{H(x)}}$.
Soit $x \in]0,1[$.Intéressons-nous, pour n entier naturel non nul, à l'expression $G_n(x+1)G_n(1-x)$, qui est bien définie car $x+1>0$ et $1-x>0$.

$$\begin{aligned} G_n(x+1)G_n(1-x) &= \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)} \times \frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(1+n-x)} \\ &= \frac{n^2(n!)^2}{(1-x^2)(4-x^2)\cdots((n+1)^2-x^2)} \\ &= \frac{\frac{n^2}{(n+1)^2}}{(\frac{1-x^2}{1^2})(\frac{4-x^2}{2^2})\cdots(\frac{(n+1)^2-x^2}{(n+1)^2})} \text{ on a divisé num. et dénom. par } (n+1)!^2 \\ &= \frac{n^2}{(n+1)^2}\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

On a immédiatement $\frac{n^2}{(n+1)^2}$ qui tend vers 1, et d'après ce que nous avons montré au début de cette question, l'expression $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, notée $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$ (il suffit de considérer l'inverse du produit partiel que nous avions noté P_n).
Finalement, en passant à la limite dans l'expression $G_n(x+1)G_n(1-x) = \frac{n^2}{(n+1)^2}\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$, on obtient $\frac{1}{H(x+1)}\frac{1}{H(1-x)} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$, donc: $\boxed{H(x+1)H(1-x) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$

Intéressons-nous à présent, toujours pour $x \in]0,1[$ et pour n entier naturel non nul, à l'expression $\frac{G_n(x)}{G_n(x+1)}$, qui est bien définie car $x>0$ et $x+1>0$.
$\frac{G_n(x)}{G_n(x+1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \times \frac{(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}{n^{x+1}n!} = \frac{x+n+1}{nx}$ tend vers $\frac{1}{x}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or $\frac{G_n(x)}{G_n(x+1)}$ tend vers $\frac{\frac{1}{H(x)}}{\frac{1}{H(x+1)}}$, donc par unicité de la limite on peut affirmer que: $\boxed{\frac{H(x+1)}{H(x)} = \frac{1}{x}}$.