1. Première partie

1. (a) Les coordonnées du point H_0 peuvent par définition du projeté orthogonal s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_h &= x_0 + \lambda a \\ y_h &= y_0 + \lambda b \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus ce point appartient à la droite D, d'où

$$a(x_0 + \lambda a) + b\left(y_0 + \lambda b\right) + c = 0$$

On tire alors de cette équation la valeur de λ, on obtient :

$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

D'où les coordonnées du point H_0 :

$$\boxed{\left(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)}$$

(b) On sait que $d(M_0, D) = \left|\left|\overrightarrow{M_0H_0}\right|\right|$, d'où

$$\begin{aligned} d(M_0, D) &= \left|\left|\left(a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)\right|\right| \\ &= \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{a^2 + b^2} ||(a, b)|| \\ &= \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ &\boxed{= \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{cases} D_0 : x &= 0 \\ D_{-1} : y &= 2 \\ D_1 : y &= 0 \end{cases}$$

Un point M de coordonnées (x, y) est donc, d'après la question précédente, équidistant des trois droites si, et seulement si

$$|x| = \left|y - 2\right| = \left|y\right|$$

En particulier $(y-2)^2 = y^2$ d'où l'on tire $y = 1$, et donc $x = \pm 1$. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ vérifiant bien les conditions précédentes, on a

Les points équidistants des trois droites D_0, D_{-1}, D_1 sont les points de coordonnées $(1,1)$ et $(-1,1)$.

(b) Soit un point M de coordonnées (x,y) équidistant de toutes les droites (D_t) pour $t \in \mathbb{R}$. Alors ce point est en particulier équidistants des droites D_0, D_{-1}, D_1. Ainsi d'après la question précédente, le point M est l'un des deux points $(1,1)$ ou $(-1,1)$. On a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'après la question 1b :

$$\begin{aligned} d\left((1,1), D_t\right) &= \frac{\left|t^2-1-2t-2t(t-1)\right|}{\sqrt{(t^2-1)^2+4t^2}} \\ &= \frac{\left|-1-t^2\right|}{\sqrt{(1+t^2)^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$d\left((-1,1), D_t\right) = \frac{\left|1-3t^2\right|}{t^2+1}$$

qui n'est pas constant. On a donc démontré :

Il existe un unique point équidistant de toutes les droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$, et ce point est le point de coordonnées $(1,1)$.

3. (a) Le point de coordonnées $(0, 1-t)$ est un point de la droite D_t de façon immédiate. De plus de l'équation de la droite D_t on obtient que le vecteur $\left(t^2-1, -2t\right)$ est un vecteur normal, et donc le vecteur $(-2t, 1-t^2)$ est un vecteur directeur. On en déduit donc le paramétrage suivant de la droite D_t :

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= -2t\lambda \\ y &= 1-t+\lambda(1-t^2) \end{cases}$$

(b) Cherchons une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que la courbe :

$$t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= -2t\lambda(t) \\ y(t) &= 1-t+\lambda(t)(1-t^2) \end{cases}$$

soit telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ soit colinéaire au vecteur $(-2t, 1-t^2)$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & -2t \\ y'(t) & 1-t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les règles du calcul différentiel et la linéarité du déterminant par rapport à sa première colonne permet alors d'obtenir l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2t \\ -1 & 1-t^2 \end{vmatrix} + \lambda(t) \begin{vmatrix} -2 & -2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix} = 0$$

et d'en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ qui est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par définition de la développée, la courbe Γ est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= -2\frac{-t}{1+t^2} \\ y &= 1-t+(1-t^2)\frac{-t}{1+t^2} \\ &= \frac{(1-t)(1+t^2)-t(1-t)(1+t)}{1+t^2} \\ &= \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}$$

soit, comme attendu :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}}$$

4. (a) On reconnaît immédiatement :

$$\boxed{\text{la courbe } \Gamma' \text{ est le cercle de centre } (1,1) \text{ et de rayon } 1.}$$

(b) On vérifie que $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ avec les valeurs de x et y trouvées en question 3b. On a en effet pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2 &= \left(\frac{2t^2-1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2-(1+t^2)}{1+t^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2-1)^2+4t^2\right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left(t^4-2t^2+1+4t^2\right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\left((t^2+1)^2\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

On a donc bien $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Ces courbes ne sont pas égales puisque le point $(2,1) \in \Gamma' \setminus \Gamma$ puisque l'on ne peut pas avoir $\frac{2t^2}{1+t^2} = 2$ (cela implique $2 = 0$). Ainsi :

$$\boxed{\text{On a bien } \Gamma \subseteq \Gamma' \text{ mais } \Gamma \neq \Gamma'.}$$

(c) Étant donné le sens de rotation des droites D_t que l'on devine grâce aux droites D_{-1}, D_0, D_1, on obtient que

$$\boxed{\text{Les deux courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique.}}$$

5. (a) D'après le cours

- Définition : la développée est le lieu des centres de courbure.
- Caractérisation : la développée est l'enveloppe des normales.

(b) Définition (déjà utilisée en 3b) : l'enveloppe d'une famille de droite $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une courbe Γ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Gamma(t) \in D_t$,
- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Gamma'(t)$ est un vecteur directeur de D_t.

(c) Ce sont les suivantes, avec, si Γ est un arc régulier, $T = \frac{\Gamma'}{||\Gamma'||}$ le vecteur normal et N le vecteur tangent (image par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur T) :

- $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \gamma N$,
- $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -\gamma T$.

6. (a) On a par un calcul direct et les définitions données en 5c :

$\forall \theta \in [0, 2\pi]$,

- $\overrightarrow{T}(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$,
- $\overrightarrow{N}(\theta) = (-\cos(\theta), \sin(\theta))$,
- $s(\theta) = \int_0^\theta \left|\left| x'(t)^2 + y'(t)^2 \right|\right| \mathrm{d}t = \theta$ (les valeurs de x, y sont celles de la question 4).
- L'origine du repère de Frénet est, par définition le point $M(\theta)$.

(b) On a par la définition donnée dans l'énoncé, qu'un paramétrage de la courbe Λ_k est donné par

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \begin{cases} x & = 1 + \cos(\theta) - (k - \theta)\sin(\theta) \\ y & = 1 + \sin(\theta) + (k - \theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

(c) Les fonctions x, y précédentes sont des fonctions dérivables de la variable θ, et on a

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \begin{cases} x'(\theta) & = (\theta - k)\cos(\theta) \\ y'(\theta) & = (\theta - k)\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi le vecteur $(x', y')(\theta)$ est nul si, et seulement si, $\theta = k$ puisque les fonctions cos et sin ne s'annulent jamais en même temps. Ainsi :

La courbe Λ_k admet un unique point stationnaire, le point de coordonnées $(1 + \cos(k), 1 + \sin(k))$, situé sur Γ'.

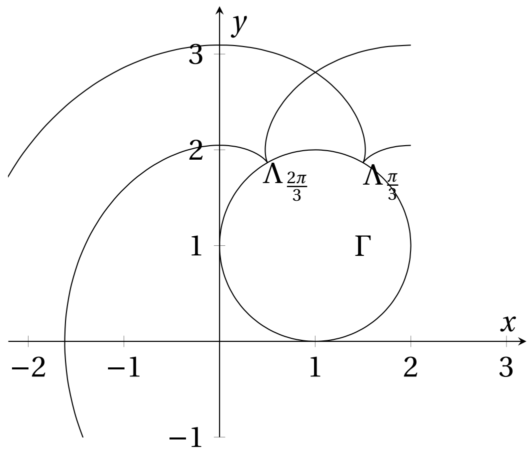
(d) On reprend la même méthode que celle utilisée en question 3b, en utilisant le vecteur $(-\sin(\theta), \cos(\theta)$ comme vecteur normal : on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 2\pi]$ telle que l'on ait :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \begin{vmatrix} x'(\theta) & -\sin(\theta) \\ y'(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} + \lambda(t) \begin{vmatrix} -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 0$$

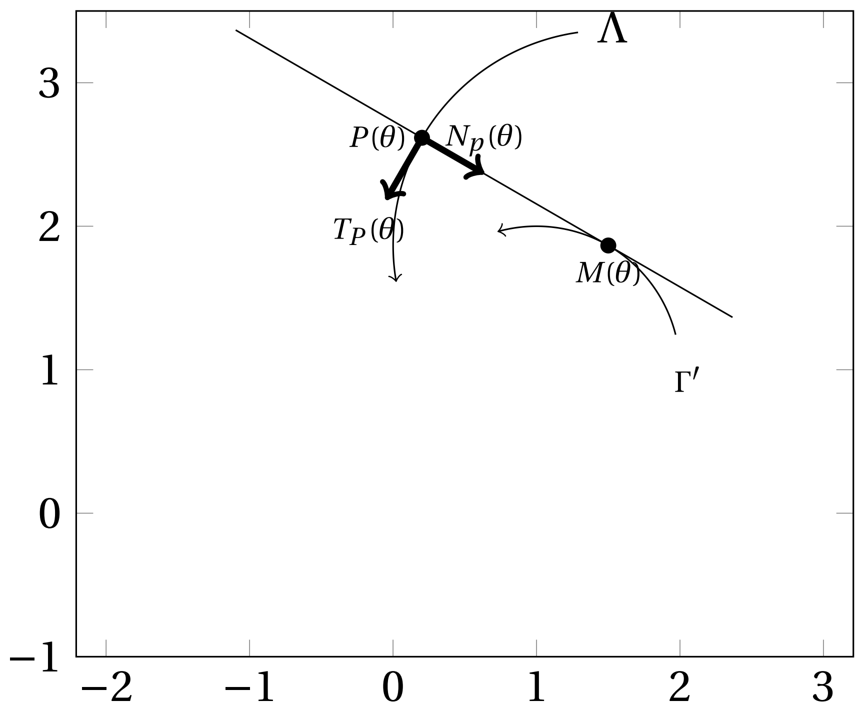
ce qui donne alors immédiatement $\lambda(\theta) = \theta - k$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 2\pi]$. On en déduit que :

la développée de la courbe Λ_k est la courbe Γ.

Remarque.

> Le graphique suivant donne quelques-unes des courbes Λ_k, où l'on identifie bien le point stationnaire comme étant le point de $M(k)$:
>
> 
>

7. (a) Nous nous trouvons donc dans une situation du type représentée ci-après, le centre de courbure $M(\theta)$ de la courbe Λ étant bien situé "dans la concavité" de la courbe Λ, et le sens du vecteur tangent $T_P(\theta)$ étant contraint par le sens de parcours de la courbe Γ' et le vecteur $N_P(\theta)$ étant obtenu par rotation du vecteur $T_P(\theta)$ d'angle $+\frac{\pi}{2}$.



(b) Par définition de la développée, la droite $P(\theta) + \text{Vect}\left(\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)}\right)$ est la tangente à la courbe Γ' au point $M(\theta)$, ainsi le vecteur $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)}$ est nécessairement colinéaire au vecteur $\overrightarrow{T}(\theta)$:

il existe $\lambda(\theta)$ tel que $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta)\overrightarrow{T}(\theta)$.

(c) On utilise les règles de calculs des dérivées de fonctions à valeurs vectorielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\right)}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{MP}}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}(\lambda\overrightarrow{T})}{\mathrm{d}\theta}
\end{aligned}$$

$$\boxed{= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\theta}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\gamma\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{N} \quad \text{d'après la première formule de Frénet} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\gamma\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

On a ensuite par définition du vecteur tangent et de l'abscisse curviligne :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}s_P}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T}_P &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} \end{cases}$$

d'où l'égalité

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s_P}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T}_P = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\gamma\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{N}}$$

(d) En projetant l'égalité précédente sur le vecteur $\overrightarrow{T}$, étant donné que les vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}_P$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{T}$ (le premier par définition, le second puisque le vecteur $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{N}_P(\theta)$ par définition mais aussi à $\overrightarrow{T}$ d'après la question 7b, on obtient donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} = 0}$$

Étant donné que s est la fonction identité de la variable θ d'après la question 6a, on obtient $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} = -1$, autrement dit :

$$\boxed{\text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall\theta \in [0,2\pi], \quad \lambda(\theta) = k - \theta.}$$

(e) On vient donc de démontrer le résultat annoncé, puisqu'une représentation paramétrique de la courbe Λ est de la forme Λ_k étant donné qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\theta \in [0,2\pi]$, $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = (k - s(\theta))\overrightarrow{T}(\theta)$:

$$\boxed{\text{Toute courbe dont la developpée est incluse dans la courbe } \Gamma' \text{ est une courbe } \Lambda_k.}$$

2. Deuxième partie

1. On applique la méthode du pivot de Gauss avec matrice témoin :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{cases}$$

Ainsi on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. (a) On a par calcul matriciel :

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$N^2 - 3N + 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

Ainsi

$$N^2 - 3N + 2\mathrm{I} = 0$$

(b) On a donc l'égalité matricielle

$$N\left(\frac{1}{2}(3\mathrm{I} - N)\right) = \mathrm{I}$$

ce qui prouve que N est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}(3\mathrm{I} - N)$. De plus

$$\frac{1}{2}(3\mathrm{I} - N) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

La matrice N est inversible, et

$$N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) i. On a d'après le cours la formule :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

ii. On a d'une part $\det(B) = 0$ car la matrice B admet deux colonnes identiques. Et d'autre part en développant ce déterminant par rapport à la j-ème colonne de la matrice B, on obtient

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{i,j} \det(B_{i,j})$$

or la j-ème colonne de la matrice B est la j'-ème de la matrice A d'où

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(B_{i,j})$$

et enfin, étant donné que les matrices A et B ne diffèrent que par leur j-ème colonne, la sous-matrice $B_{i,j}$ de la matrice B correspond nécessairement à la sous-matrice $A_{i,j}$ de la matrice A. D'où :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(A_{i,j}) = \det(B) = 0$$

(b) i. Par définition du calcul matriciel, on a

$$c_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$$

ii. Calculons tous les coefficients de la matrice C. On a pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,j} \det(A_{k,i}) \\ &= 0 \quad \text{d'après 3(a)ii} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,j} \det(A_{k,j}) \\ &= \det(A) \quad \text{d'après 3(a)i} \end{aligned}$$

d'où :

$$C = BA = \det(A)\,\mathrm{I}$$

iii. Si A est inversible, alors $\det(A)$ est non nul et on a alors l'égalité matricielle :

$$\frac{1}{\det(A)} BA = \mathrm{I}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B$$

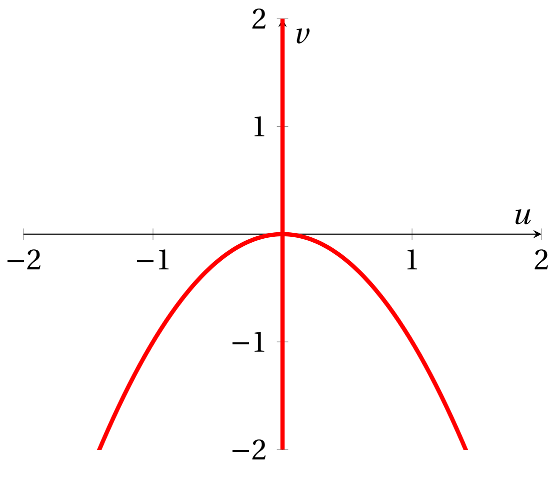
4. (a) On a pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\det(A(u,v)) &= \begin{vmatrix} uv-u & uv & u^2-v \\ v-1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u^3-u & u^3 & u^2-v \\ 2u^2+v-1 & 2u^2+v & 2u \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 + uC_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 + uC_3 \end{cases} \\
&= -\begin{vmatrix} u^3-u & u^3 \\ 2u^2+v-1 & 2u^2+v \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la troisième ligne} \\
&= u\left(u^2(2u^2+v-1) - (u^2-1)(2u^2+v)\right) \\
&= u\left(-u^2 + (2u^2+v)(u^2-u^2+1)\right) \\
&= u(u^2+v)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble D est l'ensemble

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u \neq 0 \quad \text{et } u^2+v \neq 0\right\}$$

c'est donc le complémentaire de la droite d'équation $u = 0$ et de la parabole d'équation $u^2 = -v$, que l'on représente sur le graphique suivant :



(b) On utilise la formule donnée en question 3(b)iii, on trouve alors après le calcul des 9 déterminants 2×2 et sans oublier les signes :

$$A(u,v)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-v^2-2u^2}{u(u^2+v)} & \frac{u^2}{u^2+v} & \frac{v}{u} \\ \frac{2u^2+v-1}{u(u^2+v)} & \frac{u^2-1}{u^2+v} & \frac{1-v}{u} \\ \frac{-1}{u^2+v} & \frac{u}{u^2+v} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Troisième partie

1. (a) Posons $\varphi(u,v) = (x,y,z)$ avec les fonctions x, y, z données dans l'énoncé. Alors la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ses trois fonctions coordonnées sont des polynômes, et de plus pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 2u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v - 2u^2 & = 0 \\ -2u & = 0 \\ 2u^2 & = 0 \end{cases}$$

soit $u = v = 0$.

La surface S admet un unique point non régulier : le point $(0,0)$ de paramètre $u = v = 0$.

(b) Si $(u,v) \neq (0,0)$, alors d'après le cours une équation du plan tangent à la surface S au point de paramètre (u,v) est donnée par

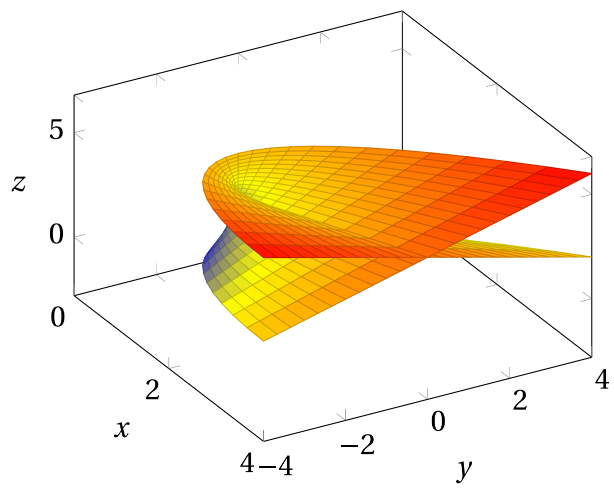
$$P_{u,v} : (v - 2u^2)(x - u^2) - 2u(y - uv) + 2u^2(z - u^2 - v) = 0$$

soit

$$P_{u,v} : (v - 2u^2)x - 2uy + 2u^2 z = u^2 v$$

Remarque.

On a représenté une portion de cette surface sur la figure suivante :



2. (a) On note encore $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ le paramétrage de la surface Σ. La surface Σ convient si, et seulement si en tout point (u,v) les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} M(u,v) \in P(u,v) \\ \text{les vecteurs } \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \text{ dirigent le plan } P_{u,v} \end{cases} \tag{1}$$

Or Eq_1 traduit exactement la première équation, et les équations Eq_2 et Eq_3 traduisent exactement le fait que les deux vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$ sont orthogonaux au vecteur $\begin{pmatrix} a(u,v) \\ b(u,v) \\ c(u,v) \end{pmatrix}$, un vecteur normal du plan tangent : ces deux condition sont équivalentes à la deuxième équation précédente,

on a donc bien l'équivalence demandée.

(b) On a, toutes les fonctions étant suffisamment régulières pour les calculs que nous faisons, en dérivant Eq_1 par rapport à u puis v et en abrégeant les écritures :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a}{\partial u}x + \frac{\partial b}{\partial u}y + \frac{\partial c}{\partial u}z\right) + \left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u}\right) &= \frac{\partial d}{\partial u} && (\mathrm{Eq}_{1u}) \\ \left(\frac{\partial a}{\partial v}x + \frac{\partial b}{\partial v}y + \frac{\partial c}{\partial v}z\right) + \left(a\frac{\partial x}{\partial v} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\frac{\partial z}{\partial v}\right) &= \frac{\partial d}{\partial v} && (\mathrm{Eq}_{1v}) \end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (S_1) &\Rightarrow \mathrm{Eq}_1, \mathrm{Eq}_2, \mathrm{Eq}_3, \mathrm{Eq}_{1u}, \mathrm{Eq}_{1v} \\ &\Rightarrow \mathrm{Eq}_1, \mathrm{Eq}_2, \mathrm{Eq}_3, \mathrm{Eq}_{1u} - \mathrm{Eq}_2, \mathrm{Eq}_{1v} - \mathrm{Eq}_3 \\ &\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Eq}_1, \mathrm{Eq}_4 = \mathrm{Eq}_{1u} - \mathrm{Eq}_2, \mathrm{Eq}_5 = \mathrm{Eq}_{1v} - \mathrm{Eq}_3}_{(S_2)} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (S_2) &\Rightarrow \mathrm{Eq}_1, \mathrm{Eq}_4, \mathrm{Eq}_5 \\ &\Rightarrow \mathrm{Eq}_1, \mathrm{Eq}_4, \mathrm{Eq}_5, \mathrm{Eq}_{1u}, \mathrm{Eq}_{1v} \\ &\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Eq}_1, -\mathrm{Eq}_4 + \mathrm{Eq}_{1u}, -\mathrm{Eq}_5 + \mathrm{Eq}_{1v}}_{(S_1)} \end{aligned}$$

d'où

$$(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$$

3. (a) La matrice associée au système (S_3) est la matrice

$$\begin{pmatrix} 2u^2 + v & 1 - (2u^2 + v) & u \\ 4u & -4u & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut, après l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$,

$$\begin{vmatrix} 2u^2+v & 1 & u \\ 4u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \neq 0$$

donc

le système est inversible.

(b) Utilisons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système augmenté :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2u^2+v & 1-(2u^2+v) & u & uv+u^3 \\ 4u & -4u & 1 & v+3u^2 \\ 1 & -1 & 0 & u \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & u & -u^3 \\ 0 & 0 & 1 & v-u^2 \\ 1 & -1 & u & \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4uL_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - (2u^2+v)L_3 \end{cases}$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & u & -u^3 \\ 0 & 0 & 1 & v-u^2 \\ 1 & 0 & u & u-u^3 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -uv \\ 0 & 0 & 1 & v-u^2 \\ 1 & 0 & 0 & u(1-v) \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - uL_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - uL_2 \end{cases}$$

d'où :

$$X = u(1-v)$$
$$Y = -uv$$
$$Z = v - u^2$$

(c) On note $\varphi(u,v) = (X,Y,Z)$ avec X,Y,Z les valeurs trouvées à la question précédente. On a alors que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions de coordonnées sont des polynômes, et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1-v \\ -v \\ -2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -v-2u^2 \\ 2u^2+v-1 \\ -u \end{pmatrix}$$

ce vecteur est nul si, et seulement si $u = 0, v + 2u^2 = 0, 2u^2 + v - 1 = 0$, ce qui implique en particulier $-1 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi

tout les points du paramétrage obtenu sont réguliers.

4. Le système associé est alors

$$A(u,v)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A(u,v)$ la matrice de la partie II. On a donc, pour $(u,v)\in D$ l'ensemble définit dans la partie II,

$$\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} = A(u,v)^{-1}\begin{pmatrix} v\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

soit, en utilisant le résultat 4b de la partie II:

$$\forall (u,v)\in D,\quad \begin{cases} X &= \frac{-v^3-2u^2v+v(u^2+v)}{u(u^2+v)}\\ &= -\frac{uv}{u^2+v}\\ Y &= \frac{(2u^2+v-1)v+(1-v)(u^2+v)}{u(u^2+v)}\\ &= \frac{u(v+1)}{u^2+v}\\ Z &= -\frac{v}{u^2+v}\end{cases}$$

$$\boxed{\forall (u,v)\in D,\quad \begin{cases} X &= -\frac{uv}{u^2+v}\\ Y &= \frac{u(v+1)}{u^2+v}\\ Z &= -\frac{v}{u^2+v}\end{cases}}$$

Remarque.

> Le résultat est encore valable si $u=0$.