Épreuve de Mathématiques C

Préambule

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, sa dérivée f' est continue sur ce segment, donc bornée, ce qui se traduit par :
$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [a,b]\,, \quad \left|f'(t)\right| \leq M.}$$
2. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\left|f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\right| = \left|f'(t)\right| \leq M$$
et par intégration on peut écrire :
$$0 \leq \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\right|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}\int_a^b M\,\mathrm{d}t = \frac{M\,(b-a)}{k}$$
et puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{M\,(b-a)}{k} = 0$, il vient :
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = 0.}$$
3. Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}$ étant de classe C^1 sur $[a,b]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :
$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$
c'est-à-dire :
$$\mathrm{i}\,k\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a) - \int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t$$
ou encore, pour k entier naturel non nul :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k} + \frac{\mathrm{i}}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t.$$
Mais
$$0 \leq \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k}\right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{k}$$
donc
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k} = 0.$$
Avec le résultat de la question précédente, on peut conclure que :
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = 0.}$$

Partie I

1. (a) i. On sait que, lorsque u tend vers 0, $\sin u \sim u \sim \tan u$, donc :

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t} = 2n.}$$

ii. On a : $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \sin(2\,n\,t) = \sin(n\,\pi) = 0$ et $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty$, donc sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t} = 0.}$$

iii. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}$, continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolonge par continuité en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ d'après les questions précédentes. L'intégrale I_n est donc faussement impropre. Notamment,

l'intégrale I_n est convergente.

(b) Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{\sin(2\,t)}{\tan t} = 2\cos^2 t = 1 + \cos(2\,t)$$

donc

$$I_1 = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ce qui donne :

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

(c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :

$$\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2\,(n+1)\,\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{2\,n\,\mathrm{i}\,t}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\,(n+1)\,\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{2\,n\,\mathrm{i}\,t} &= \mathrm{e}^{(2\,n+1)\,\mathrm{i}\,t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) \\ &= 2\left(-\sin((2\,n+1)\,t)\sin t + \mathrm{i}\cos((2\,n+1)\,t)\sin t\right)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t) = 2\cos((2\,n+1)\,t)\sin t.}$$

(d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2\,n+1)\,t)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2\cos((2\,n+1)\,t)\cos t = \cos((2\,n+2)\,t) + \cos(2\,n\,t)$$

donc

$$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin((2\,n+2)\,t)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin(2\,n\,t)}{2\,n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Avec la question (b), on peut conclure que

la suite de terme général I_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est constante égale à $\pi/2$.

2. Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(p\,t)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(p\,t)}{t}\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement impropre.
C'est vrai notamment pour $p = 2\,n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.
Les intégrales considérées sont convergentes.

3. Comme différence de telles fonctions, ϕ est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Elle se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.
Lorsque t tend vers 0, $\tan^2 t = t^2 + \mathrm{o}\left(t^3\right)$ donc
$$\tan t = \int_0^t \left(1 + \tan^2 u\right) \mathrm{d}u = t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)$$
puis
$$\lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t\,\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{3\,t^2} = 0$$
et ϕ se prolonge en une fonction $\widetilde{\phi}$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
$$\widetilde{\phi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$
On voit que
$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$
et par ailleurs, lorsque t tend vers 0,
$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t - \tan t)(t + \tan t)}{t^2\,\tan^2 t} \sim \frac{1}{t^4}\left(-\frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)\right)\left(2t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)\right) \sim \frac{-2}{3}$$
donc
$$\lim_{t\to 0} \widetilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
En conséquence du théorème de la limite de la dérivée, on peut conclure que
le prolongement $\widetilde{\phi}$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

4. Puisque $\widetilde{\phi}$ est C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général
$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,t}\mathrm{d}t$$
converge vers 0, et la suite extraite $\left(\alpha_{2n}\right)_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $\left(\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right)$ car $0 \le \left|\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right| \le \left|\alpha_{2n}\right|$. Or
$$\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t)\sin(2\,n\,t)\,\mathrm{d}t = J_n - I_n$$
donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(J_n - I_n\right) = 0.}$$

5. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ étant continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$. Elle est égale à

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t$$

où les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$ sont C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle d'intégration. L'intégrale a donc même nature que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Elle est donc convergente, car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.

L'intégrale considérée est convergente.

(b) La fonction $t \mapsto u = 2\,n\,t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.}$$

(c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie II

1. (a) Par la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{n\,\pi} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$$

donc

$$\int_{\pi}^{n\,\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{n\,\pi} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi}^{n\,\pi}$$
$$= \frac{-\cos(n\,\pi)}{n\,\pi} + \frac{\cos(\pi)}{\pi}$$

et comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$, cela conduit bien à

$$\boxed{\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.}$$

(b) On écrit :

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

donc

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$ converge pour $\alpha > 1$, notamment pour $\alpha = 2$, donc <u>la série considérée est convergente car absolument convergente.</u>

La suite des sommes partielles associées a pour terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

donc

<u>cette suite est convergente.</u>

Pour montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge, on peut montrer que la fonction

$$H : x \mapsto \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Les questions précédentes font apparaître que

$$H(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - S_n$$

est la somme de trois suites convergentes, donc est le terme général d'une suite convergente. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} H(n\pi)$.

La fonction H est de classe C^1 sur $[\pi, +\infty[$, comme primitive d'une fonction continue sur cet intervalle. Elle l'est donc sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, et pour $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$:

$$|H'(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n\pi}$$

donc, par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$|H(x) - H(n\pi)| \leq \frac{|x - n\pi|}{n\pi} \leq \frac{|(n+1)\pi - n\pi|}{n\pi} = \frac{1}{n}$$

puis par inégalité triangulaire :

$$0 \leq |H(x) - \ell| = |H(x) - H(n\pi) + H(n\pi) - \ell| \leq \frac{1}{n} + |H(n\pi) - \ell|.$$

Soit alors x un réel de $[\pi, +\infty[$. Si n_x est la partie entière de $\dfrac{x}{\pi}$, on a $x \in [n_x\,\pi, (n_x+1)\,\pi]$. Lorsque x tend vers l'infini, il en est de même de n_x puisque $n_x \geq \dfrac{x}{\pi} - 1$. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n_x} + |H(n_x\,\pi) - \ell|\right) = 0$$

le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} |H(x) - \ell| = 0$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \ell$.
On a bien établi que

<u>l'intégrale considérée est convergente.</u>

2. (a) Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\,a^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}$. Comme a n'est pas nul, u_n non plus et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a^{2n+3}}{a^{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+3}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| \sim \frac{a^2}{4n^2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$$

ce qui permet de conclure, d'après le critère de d'Alembert, que

<u>la série considérée est absolument convergente.</u>

(b) On sait que, pour tout t réel :

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

et l'on en déduit :

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

pour $t \neq 0$, l'égalité étant vraie aussi pour $t = 0$, et le rayon de convergence est toujours infini.

<u>La fonction ψ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.</u>

(c) On peut primitiver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, donc la primitive de ψ s'annulant en 0 est

$$a \mapsto \int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^a t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^a$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\int_0^a \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}.}$$

3. (a) On rappelle que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

le rayon de convergence étant infini.

(b) On a, puisque $|\mathcal{R}e\,(z)| \leq |z|$:

$$\left|\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\right| = \frac{a^n}{n!}\left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\right| \leq \frac{a^n}{n!}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right| = \frac{a^n}{n!}$$

ce qui montre que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)$ est absolument convergente. On peut alors écrire :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}$$

et puisque

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\right|\mathrm{d}t$$

on obtient bien

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}.}$$

(c) D'après la question (a) :

$$\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right)^n}{n!}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}}{n!}.}$$

(d) Sans difficulté :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,p\,t}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\text{ si } p = 0.}$$

Pour n entier naturel non nul :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(n\,t)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 2p \geq 1 \\ \dfrac{(-1)^p}{2\,p+1} & \text{si} \quad n = 2p+1 \end{cases}.}$$

(e) D'après la question (c) :

$$\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n\,a^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}}{n!}$$

donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) = \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right)$$

puis, d'après la question (b) :

$$0 \leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Mais $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, car c'est le reste d'une série convergente.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) \mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) \mathrm{d}t$, ou en d'autres termes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) \mathrm{d}t.$$

Mais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,0\,t}\right) \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\,n}\,a^{2\,n}}{(2\,n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,n\,t}\right) \mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\,n+1}\,a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(2\,n+1)\,t}\right) \mathrm{d}t$$

donc d'après la question (d) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,t}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\,n+1}\,a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}} \mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!}.}$$

(f) i. Pour $x \geq 0$, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\,\cos t}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (par composition de $t \mapsto -x\,\cos t$ et de la fonction exponentielle).

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-x\,\cos t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car du type $x \mapsto \mathrm{e}^{\omega\,x}$).

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x \geq 0$, $0 \leq \mathrm{e}^{-x\,\cos t} \leq 1$ car $\cos t \geq 0$, et la fonction continue $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le cours, on en déduit que

<u>l'application F est continue sur $[0, +\infty[$.</u>

Puisqu'on intègre sur un segment, on aurait aussi pu arguer de la continuité de l'application $(x, t) \mapsto \mathrm{e}^{-x\,\cos t}$ sur $[0, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par composition avec l'exponentielle du produit des fonctions $(x, t) \mapsto -x$ et $(x, t) \mapsto t \mapsto \cos t$.

ii. L'application $t \mapsto -a\cos t$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, car $a > 0$. Par composition avec la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\underline{\text{l'application considérée est croissante sur } [0, \pi/2]}\ .$$

iii. On a vu précédemment que $\mathrm{e}^{-a\cos t} \leq 1$ pour $a > 0$ et $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc a fortiori[1] pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par intégration :

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

ou encore :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.}$$

iv. On peut alors écrire :

$$0 \leq F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Mais d'après ii, pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right]$:

$$\mathrm{e}^{-a\cos t} \leq \mathrm{e}^{-a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} = \mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}$$

donc par intégration :

$$0 \leq F(a) \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on a

$$\lim_{a\to+\infty} a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \lim_{a\to+\infty} \sqrt{a} = +\infty$$

donc

$$\lim_{a\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 0$$

et par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} F(a) = 0.}$$

(g) On écrit :

$$-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} = -a\cos t + \mathrm{i}\,a\sin t$$

donc $\left|\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right| = \left|\mathrm{e}^{-a\cos t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a\sin t}\right|$ soit

$$\boxed{\left|\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right| = \mathrm{e}^{-a\cos t}.}$$

On a aussi :

$$\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}} = \mathrm{e}^{-a\cos t}\cos(a\sin t) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a\cos t}\sin(a\sin t)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) = \mathrm{e}^{-a\cos t}\cos(a\sin t) \text{ et } \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) = \mathrm{e}^{-a\cos t}\sin(a\sin t).}$$

1. sous la condition $0 < \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, soit $a > \dfrac{4}{\pi^2}$, que l'on supposera remplie dans tout ce qui suit

(h) On écrit :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)\right|\mathrm{d}t$$

car on intègre une fonction positive, et comme $\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right) = \mathrm{e}^{-a\,\cos t}$, on a bien établi :

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)\mathrm{d}t\right| \leq F(a)\,.}$$

Puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = 0$, il en découle que

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)\mathrm{d}t = 0.}$$

(i) D'après les questions 2.(c) et 3.(e) :

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)!} = \frac{\pi}{2} - \mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right).$$

On peut écrire :

$$\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right) = \mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right) + \mathcal{R}e\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right)$$

les deux termes de droite tendant vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$, le premier d'après la question précédente, le deuxième du fait que :

$$\left|\mathcal{R}e\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right)\right| \leq \left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

d'après les questions (g) et (f) iii.
Comme

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

on retrouve bien que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$