Première partie.

1. Pour répondre à cette question, il suffit de calculer le déterminant des vecteurs u_1 et u_2 dans la base (e_1, e_2) : la famille sera une base si et seulement si ce déterminant est non nul.

   (a) Le vecteur u_2 étant nul,

   <u>la famille (u_1, u_2) est liée.</u>

   (b) On a : $u_1 = 3e_1 - e_2$ et $u_2 = e_1 + 3e_2$ avec $[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$ donc

   <u>la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.</u>

   (c) On a : $u_1 = 3e_1 + e_2$ et $u_2 = -3e_1 + e_2$ avec $[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ donc

   <u>la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.</u>

   (d) On a : $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2)$ et $u_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}u_1$ et

   <u>la famille (u_1, u_2) est liée.</u>

2. Par définition, l'application $g_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
   Soient u_1 et u_1 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, d'affixes respectives z_1 et z_1. Alors :

$$\begin{aligned} f_{a,b}(z_1 + z_2) &= a(z_1 + z_2) + b\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = az_1 + az_2 + b\overline{z_1} + b\overline{z_2} \\ &= (az_1 + b\overline{z_1}) + (az_2 + b\overline{z_2}) = f_{a,b}(z_1) + f_{a,b}(z_2). \end{aligned}$$

   Or l'affixe d'une somme est la somme des affixes, donc $g_{a,b}(u_1 + u_2) = g_{a,b}(u_1) + g_{a,b}(u_2)$.
   Soient u un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe z et α un réel. Alors $\overline{\alpha} = \alpha$ donc

$$f_{a,b}(\alpha z) = \alpha f_{a,b}(z)$$

   et, toujours parce que α est réel : $g_{a,b}(\alpha u) = \alpha g_{a,b}(u)$.
   On peut conclure que :

   <u>l'application $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.</u>

3. (a) D'après la question précédente, on montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
   D'une part, G est non vide : il contient l'application nulle $g_{0,0}$.
   D'autre part, si $g_{a,b}$ et $g_{c,d}$ sont deux éléments de G et si α est un réel, alors $\alpha g_{a,b} + g_{c,d} = g_{\alpha a+b, \alpha c+d}$ car $\overline{\alpha} = \alpha$ donc $\alpha g_{a,b} + g_{c,d} \in G$.
   En conclusion,

   <u>l'ensemble G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.</u>

   (b) On a vu que $G \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
   Par ailleurs, la famille $(g_{1,0}, g_{\mathrm{i},0}, g_{0,1}, g_{0,\mathrm{i}})$ est libre. En effet, si $g_{a,b}$ est l'application nulle, alors $f_{a,b}$ également donc $a + b = f_{a,b}(1) = 0$ et $a - b = \dfrac{1}{\mathrm{i}} f_{a,b}(\mathrm{i}) = 0$ puis $a = b = 0$. Il en résulte que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre réels tels que

$$0 = \alpha g_{1,0} + \beta g_{i,0} + \gamma g_{0,1} + \delta g_{0,\mathrm{i}} = g_{a,b}$$

avec $a = \alpha + i\beta$ et $b = \gamma + i\delta$, alors $a = b = 0$ puis $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
On en déduit que

$$4 \leq \dim G \leq \dim \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right) = 4$$

soit $\dim G = \dim \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$, et comme $G \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$:

$$\boxed{G = \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right).}$$

4. (a) i. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto az$ avec a réel non nul.
L'application $g_{a,b}$ est une homothétie de rapport a.
ii. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ avec θ réel.
L'application $g_{a,b}$ est une rotation d'angle θ.
iii. L'application $f_{a,b}$ est définie par $z \mapsto \overline{z}$.
L'application $g_{a,b}$ la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
(b) Comme composée d'une rotation et d'une réflexion du plan,
l'application $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est une isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^2$.
Il s'agit donc d'une réflexion.
On note que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ est invariant par $f_{a,b} \circ f_{a',b'} : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z}$ donc le vecteur

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$$

est invariant par $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$.
L'application $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est la réflexion d'hyperplan la droite dirigée par $\cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2)\, e_2$.

5. (a) Si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$ et $p(x) = x_1$ donc $x + s(x) = 2x_1 = 2p(x)$.

$$\boxed{id + s = 2p.}$$

(b) On a vu à la question 4.(b) que l'application $z \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{z}$ représente la réflexion par rapport à la droite engendrée par u_α. D'après la question précédente, la projection cherchée est donc associée à l'application

$$z \mapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{z}$$

et ainsi

$$\boxed{(a,b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right).}$$

6. Si x et y sont des réels, alors

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x + \mathrm{i}y) &= (a_r + \mathrm{i}a_i)(x + \mathrm{i}y) + (b_r + \mathrm{i}b_i)(x - \mathrm{i}y) \\ &= ((a_r + b_r)x + (b_i - a_i)y) + \mathrm{i}((a_i + b_i)x + (a_r - b_r)y) \end{aligned}$$

donc l'application $g_{a,b}$ associe à tout vecteur $xe_1 + ye_2$ de $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$((a_r + b_r)x + (b_i - a_i)y)e_1 + ((a_i + b_i)x + (a_r - b_r)y)e_2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix}.}$$

7. Si l'on suppose que $a \in \mathbb{R}$, alors $a_i = 0$ et la matrice précédente est symétrique à coefficients réels. On en déduit que
la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

8. (a) Soit $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de $G_{a,b}$. Alors

$$P_{a,b}(X) = \begin{vmatrix} X - (a_r + b_r) & -b_i + a_i \\ -a_i - b_i & X - (a_r - b_r) \end{vmatrix} = X^2 - 2a_r X + a_r^2 - b_r^2 - b_i^2 + a_i^2$$

soit

$$\boxed{P_{a,b}(X) = X^2 - 2\mathrm{Re}(a)\,X + |a|^2 - |b|^2.}$$

(b) Le discriminant est :

$$\Delta = 4\left((\mathrm{Re}(a))^2 - |a|^2 + |b|^2\right) = 4\left(|b|^2 - (\mathrm{Im}(a))^2\right).$$

Si l'on suppose $|b|^2 \neq (\mathrm{Im}(a))^2$, alors $\Delta \neq 0$ et $P_{a,b}$ admet deux racines distinctes, qui sont les valeurs propres de $G_{a,b}$. Puisqu'elle est carrée d'ordre 2,
la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est nécessaire que $P_{a,b}$ soit scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et cette condition sera ici suffisante puisque $G_{a,b}$ admettra deux valeurs propres distinctes. En conclusion,
la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $|b| > |\mathrm{Im}(a)|$
c'est-à-dire $\Delta > 0$.

(c) Si l'on suppose $|b|^2 = (\mathrm{Im}(a))^2$, alors $\Delta = 0$ et $G_{a,b}$ admet une valeur propre double qui est $\lambda = \mathrm{Re}(a)$.
Si $G_{a,b}$ est diagonalisable, elle est semblable à λI_2 donc égale à λI_2 (car pour tout matrice inversible Q l'on a : $Q^{-1}(\lambda I_2)Q = \lambda I_2$). Puisque $G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix}$, cela impose

$$a_r + b_r = \lambda = a_r - b_r \quad \text{et} \quad b_i - a_i = 0 = a_i + b_i$$

ou encore $b_r = 0$ et $a_i = 0$. Comme $|b|^2 = |a_i|^2$, on en déduit bien que $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.
Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$, alors $G_{a,b} = \begin{pmatrix} a_r + b_r & b_i - a_i \\ a_i + b_i & a_r - b_r \end{pmatrix} = a_r I_2$ est diagonale réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

(d) L'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après les questions précédentes, on peut conclure que :
l'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $|b| > |\mathrm{Im}(a)|$ ou $b = \mathrm{Im}(a) = 0$.

Deuxième partie.

1. (a) Cette intersection a pour équations $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$.

   Il s'agit d'une hyperbole.

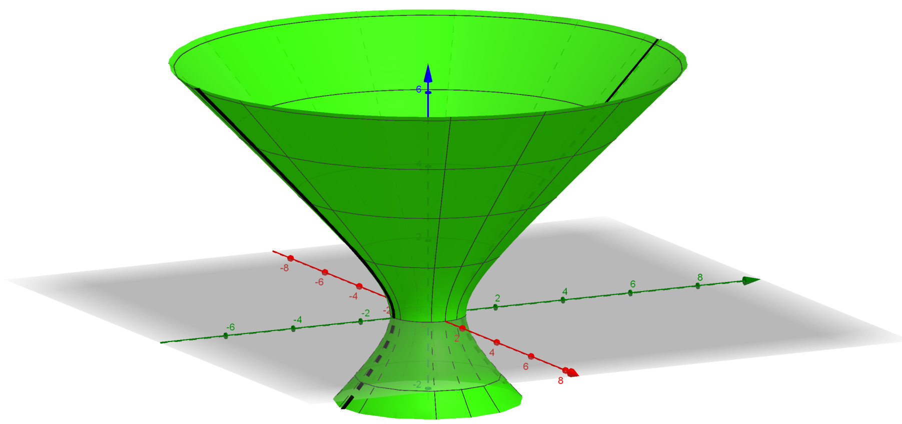
   (b) Cette intersection a pour équations $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=a \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x^2+y^2=1+a^2 \\ z=a \end{cases}$.

   Il s'agit d'un cercle.

   On en déduit que

   la surface S est de révolution d'axe (Oz).

   (c) Le plan d'équation $x=0$ contenant l'axe de révolution, l'hyperbole du (a) en est une méridienne.



2. (a) Le symétrique du point M de coordonnées (x,y,z) par rapport au plan $z=0$ est le point M' de coordonnées $(x,y,-z)$. Or

$$M \in S \Rightarrow x^2+y^2-z^2=1=x^2+y^2-(-z)^2 \Rightarrow M' \in S$$

   donc

   la surface S admet le plan d'équation $z=0$ pour plan de symétrie.

   (b) Le symétrique du point M de coordonnées (x,y,z) par rapport au plan $x=y$ est le point M' de coordonnées (y,x,z). Or

$$M \in S \Rightarrow x^2+y^2-z^2=1=y^2+x^2-z^2 \Rightarrow M' \in S$$

   donc

   la surface S admet le plan d'équation $x=y$ pour plan de symétrie.

   En fait, tout plan contenant l'axe de révolution est un plan de symétrie de S. Un tel plan admet un équation du type $x\cos(\theta)+y\sin(\theta)=0$, et le symétrique par rapport à ce plan du point M de coordonnées (x,y,z) est le point M' de coordonnées (X,Y,Z) avec

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et puisque $X^2+Y^2-Z^2=x^2+y^2-z^2$, l'on a bien $M\in s\Rightarrow M'\in S$.

(c) La symétrie par rapport à cette droite est la composée des symétries par rapport aux plans d'équation $x=0$ et $z=0$. Comme ces plans sont des plans de symétrie de S,

$$\underline{\text{la droite donnée est un axe de symétrie de } S.}$$

On aurait pu aussi raisonner comme précédent, le symétrique par rapport à cette droite du point de coordonnées (x,y,z) étant le point de coordonnées $(-x,y,-z)$.

3. (a) Un point M de coordonnées (x,y,z) est sur la surface Σ s'il est sur le même parallèle qu'un point $A\,(a,b,c)$ de Δ. Or ce parallèle peut être vu comme l'intersection d'une sphère centrée en un point de (Oz), par exemple O, et d'un plan perpendiculaire à (Oz) passant par A. Ce parallèle est donc défini par les conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ z=c \end{array}\right. .$$

Ainsi : $M\in\Sigma\Leftrightarrow\exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=c \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ z=c \end{array}\right.$

ou encore : $M\in\Sigma\Leftrightarrow\exists c\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+c^2=1+2c^2 \\ z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+y^2-z^2=1.$

On a bien établi que

$$\boxed{\Sigma=S.}$$

(b) La surface S est donc la réunion des droites obtenues par rotation autour de l'axe (Oz) de la droite Δ, ce qui permet de conclure que

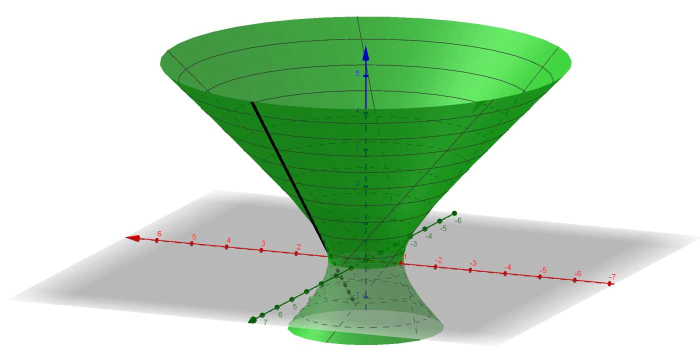
$$\underline{\text{la surface } S \text{ est réglée.}}$$

Une rotation autour de l'axe (Oz) peut être caractérisée par une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image dans une telle rotation d'un point de coordonnées $(1,t,t)$ de Δ est le point de coordonnées $(\cos(\theta)-t\sin(\theta)\,,\sin(\theta)+t\cos(\theta)\,,t)$ donc une famille de génératrices est constituée des droites de représentation paramétrique :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=\cos(\theta)-t\sin(\theta) \\ y=\sin(\theta)+t\cos(\theta) \\ z=t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}.}$$



Ci-dessus le tracé de Δ et de S comme surface réglée

4. (a) Si S contient une droite horizontale, celle-ci est contenue dans l'intersection de S et d'un plan horizontal d'équation $z = a$, et l'on a vu qu'une telle intersection est un cercle ; or un cercle ne contient pas de droite.

La surface S ne contient aucune droite horizontale.

(b) Tout vecteur directeur de D a sa troisième composante non nulle (sinon ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{k}$ et la droite est horizontale), donc, quitte à diviser par cette composante non nulle, on peut choisir un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de D dont la troisième composante est égale à 1, donc du type $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$ avec α et β réels.
La droite D n'est pas parallèle au plan d'équation $z = 0$, donc elle rencontre ce plan en un point A de coordonnées $(a, b, 0)$ avec a et b réels.
Une représentation paramétrique de $D = A + \text{Vect}\left(\overrightarrow{d}\right)$ est alors :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$$

et

le résultat est établi.

(c) La droite D est contenue dans S si et seulement si, pour tout t réel :

$$(a + \alpha t)^2 + (b + \beta t)^2 - t^2 = 1$$

ce qui équivaut à dire que le polynôme $P(t) = \left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right)t^2 + 2(a\alpha + b\beta)t + \left(a^2 + b^2 - 1\right)$ est identiquement nul, cette condition équivalant à la nullité des coefficients, soit

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 = a^2 + b^2 \text{ et } a\alpha + b\beta = 0.$$

Mais

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & a\alpha + b\beta \\ a\alpha + b\beta & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{D \subset S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O(2).}$$

(d) Les éléments de $O(2)$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec θ réel, et représentent alors une rotation (isométrie positive du plan) ou de le forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec θ réel, et représentent une réflexion (isométrie négative du plan).

(e) D'après les questions précédentes, les droites incluses dans S admettent une représentation paramétrique du type :

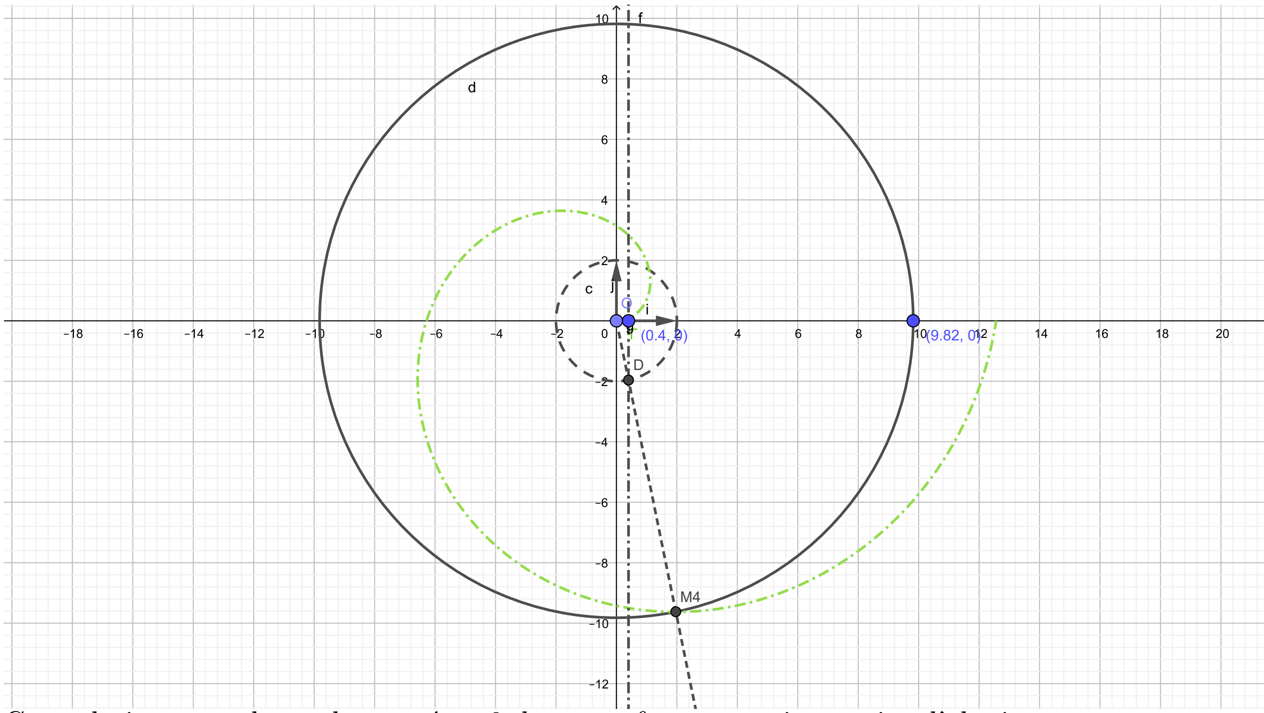
$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta) - t\sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + t\cos(\theta) \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta) + t\sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) - t\cos(\theta) \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.}$$

Troisième partie.

1. (a) On donne :
$$\boxed{z(\theta) = \theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.}$$
   (b) La fonction z est dérivable comme produit de telles fonctions, et facilement :
$$\boxed{\forall \theta \in [0; 2\pi], \quad z'(\theta) = (1 + \mathrm{i}\theta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.}$$
   (c) Puisque $z'(\theta) = x'(\theta) + \mathrm{i}y'(\theta)$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ on a :
$$\boxed{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right\| = \sqrt{1+\theta^2}.}$$
   Notamment, cette quantité ne s'annule pas, donc
   <u>la courbe Γ est régulière.</u>

2. (a) La fonction f est dérivable sur D, et pour tout $\theta \in D$:
$$f'(\theta) = 2 + \tan^2(\theta) > 0.$$
   On en déduit que f croît de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$, puis croît de $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, et enfin croît de $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ sur $]-\infty, 2\pi]$.
   (b) On voit que f est trois fois strictement croissante et continue d'un intervalle I sur son intervalle image $J = f(I)$. Elle réalise à chaque fois une bijection de I sur J, et dans les trois cas, 0 appartient à J, donc admet un unique antécédent dans I. On peut préciser que $\theta_0 = 0$.
   <u>L'existence des réels θ_0, θ_2 et θ_4 est établie.</u>
   (c) Les points $M(\theta)$ en lesquels existent une tangente horizontale correspondent aux valeurs de $\theta \in [0; 2\pi]$ pour lesquelles $y'(\theta) = 0$. Or
$$y'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) + \theta\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(\theta) = 0$$
   car $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ ne peuvent s'annuler simultanément.
   <u>Les points à tangente horizontale sont les points $M(\theta_0)$, $M(\theta_2)$ et $M(\theta_4)$.</u>

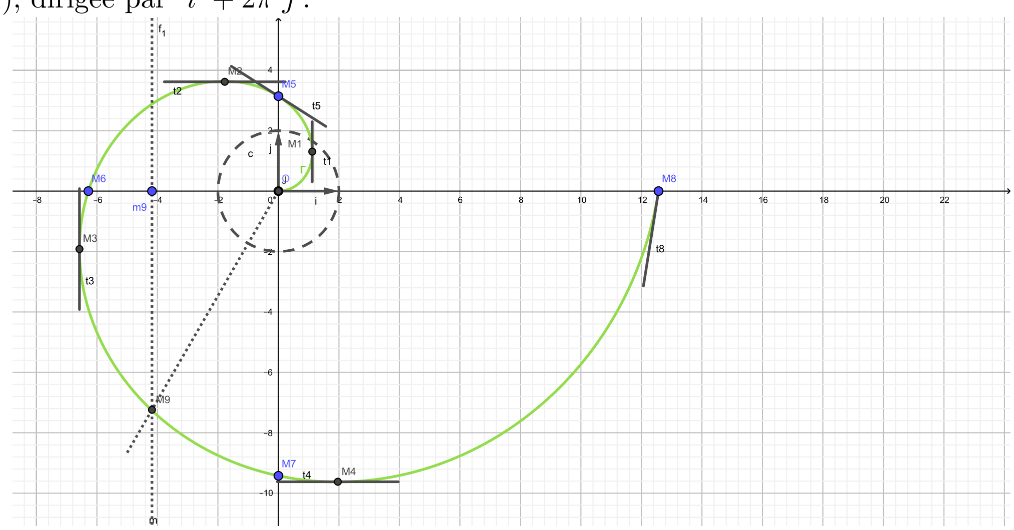
3. (a) On trace les axes gradués, puis le cercle unité, et l'on place la valeur $\cos(\theta_4)$ sur l'axe des abcisses.
   Avec l'équerre, on trace la perpendiculaire en ce point à l'axe (Ox), laquelle coupe le cercle unité en deux points. On retient celui d'ordonnée négative puisque $\theta_4 \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.
   En le joignant à l'origine, on trace une droite qui définit l'angle θ_4.



Cette droite coupe le cercle centré en 0 de rayon θ_4 en un unique point d'abscisse positive : c'est le point $M(\theta_4)$.

(b) On procède comme ci-dessus pour les points $M(\theta_i)$ avec $1 \leq i \leq 4$, avec leurs tangentes horizontales ou verticales. Le point $M(0)$ est l'origine, avec tangente horizontale.
Les autres points sont sur l'un des axes de coordonnées. Celui de paramètre $\dfrac{\pi}{2}$ a une tangente dirigée par le vecteur $-\pi\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$.

(c) On a donc placé 9 points, dont 6 avec leur tangente. On ajoute la tangente en $M(2\pi)$, dirigée par $\overrightarrow{\imath} + 2\pi\overrightarrow{\jmath}$.



On place $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{-2\pi}{3}, \frac{-2\pi\sqrt{3}}{3}\right)$, situé sur la droite (facilement constructible) passant par l'origine de pente $\sqrt{3}$, avec $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$.

4. (a) L'aide de $D(R)$ est égale à πR^2.
Les demi-droites d'origine O dirigées par $\overrightarrow{u}(t_k)$, pour $0 \leq k \leq n-1$, partitionnent $D(R)$ en n secteurs angulaires de même aire, égale à $\frac{\pi R^2}{n}$.

$$\boxed{\mathcal{A}_k(R) = \frac{\pi}{n} R^2.}$$

(b) Pour $\theta \in [t_k, t_{k+1}]$ l'on a :

$$t_k \leq \left\| \overrightarrow{OM}(\theta) \right\| = \theta \leq t_{k+1}$$

donc $D_k(t_k) \subset \Delta_k \subset D_k(t_{k+1})$ puis, d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{n} t_k^2 \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{\pi}{n} t_{k+1}^2$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{4\pi^3}{n^3} k^2 \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{4\pi^3}{n^3} (k+1)^2.}$$

(c) On procède par récurrence sur N.
Le résultat étant clair pour $N = 0$, supposons le vrai pour un entier N fixé. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{N+1} p^2 = \sum_{p=0}^{N} p^2 + (N+1)^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= \frac{N+1}{6}\left(2N^2 + 7N + 6\right) = \frac{N+1}{6}(N+2)(2N+3)\end{aligned}$$

ce qui établit l'hérédité.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.}$$

(d) D'après la question (b) :

$$\frac{4\pi^3}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \leq \frac{4\pi^3}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

donc d'après la question (c) :

$$\frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k \leq \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1).$$

Il reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$.

$$\boxed{\frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leq \mathcal{A} \leq \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1).}$$

Ce résultat vaut pour tout entier naturel $n \geq 1$.
Puisque

$$\lim_n \frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) = \lim_n \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1) = \lim_n \frac{4\pi n^2}{3n^2} = \frac{4\pi^3}{3}$$

un passage à la limite fournit :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{4\pi^3}{3}.}$$

5. (a) On a vu que cette tangente est dirigée par $\overrightarrow{d} = -\pi\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$. Un point m appartient à cette tangente si les vecteurs $\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{2}\right)m}$ et $\overrightarrow{d}$ sont liés, donc si

$$0 = \left[\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{2}\right)m}, \overrightarrow{d}\right] = \begin{vmatrix} x & -\pi \\ y - \frac{\pi}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2x + \pi y - \frac{\pi^2}{2}.$$

Le point N a donc pour coordonnées $\left(\frac{\pi^2}{4}, 0\right)$ donc

$$\boxed{ON = \frac{\pi^2}{4}.}$$

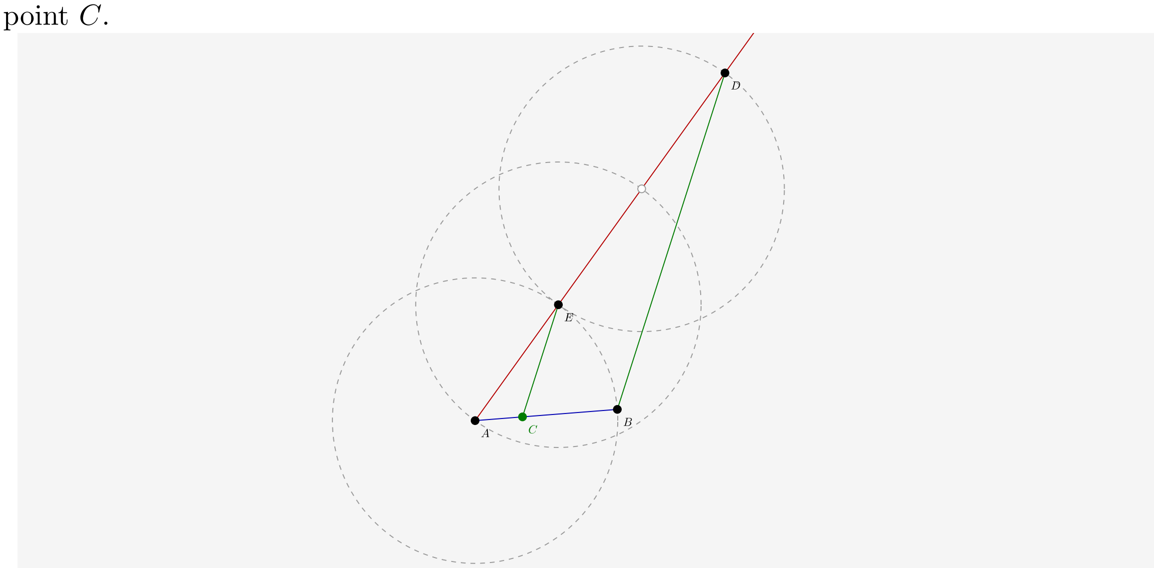
(b) Le périmètre du cercle de centre O et passant par le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est

$$2\pi \left\|\overrightarrow{OM\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right\| = \pi^2.$$

Il suffit de construire le point N_1 tel que

$$\boxed{\overrightarrow{ON_1} = 4\overrightarrow{ON}.}$$

6. (a) On construit une demi-droite issue de A ne contenant pas le segment $[AB]$. On note E l'intersection de cette demi-droite avec le cercle centré en A de rayon AB. Toujours avec le compas, on construit sur cette demi-droite le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$. On trace le segment $[BD]$. La parallèle à (BD)coupe $[AB]$ en un point C.



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}.$$

(b) On construit le point P selon la méthode précédente ; on note $A = M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

On trace le cercle de centre O passant par P. Il coupe Γ en un point $B = M(\theta)$ tel que

$$\theta = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{OM}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\| = \frac{4\pi}{9}$$

donc $B = M\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ et l'angle $\frac{4\pi}{9}$ est alors déterminé puisque

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{9}\overrightarrow{u}\left(\frac{4\pi}{9}\right).$$

Le dessin ci-dessous ne détaille que la dernière construction.