Épreuve de Mathématiques A

Problème d'Algèbre linéaire

Partie I

1. Commençons par déterminer le polynôme caractéristique de A, dont les racines sont exactement les valeurs propres :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

par développements deuxième ligne puis première colonne. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.
Comme elle est carrée d'ordre 3 et qu'elle admet trois valeurs propres réelles distinctes,
<u>la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.</u>
On calcule de même :

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 3 \\ -3 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

donc $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 4\}$ et la multiplicité $\mathrm{m}(1)$ de 1 est égale à 2.
Puisque son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice B est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{m}(1) = \dim E_B(1)$ et $\mathrm{m}(4) = \dim E_B(4)$.
On sait que $1 \leq \dim E_B(4) \leq \mathrm{m}(4)$ donc $\mathrm{m}(4) = \dim E_B(4)$ car $\mathrm{m}(4) = 1$.
Par ailleurs,

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est clairement une matrice de rang 2, donc par le théorème du rang :

$$\dim E_B(1) = 3 - 1 = 2 = \mathrm{m}(1).$$

En conclusion :
<u>la matrice B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.</u>

2. Sans difficulté, on obtient :

$$\boxed{A^2 = B.}$$

3. Déterminons les sous-espaces propres de A, qui sont des droites, puisque ses valeurs propres sont simples.
   On a :
$$A+I_3=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   donc l'espace propre pour la valeur propre -1 est :
$$E_A(-1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ ;\ x-z=0=z+y\right\}=\left\{\begin{pmatrix}z\\-z\\z\end{pmatrix}\ ,\ z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$
   On calcule de même :
$$A-I_3=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
   donc l'espace propre pour la valeur propre 1 est :
$$E_A(1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ ;\ x-z=0=y-z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\ ,\ z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$
   Enfin :
$$A-2I_3=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   donc l'espace propre pour la valeur propre 2 est :
$$E_A(2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ ;\ x-y=0=z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}\ ,\ x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$
   En conclusion, on peut prendre par exemple :
$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.}$$
4. Il résulte des deux questions précédentes que :
$$B=A^2=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=PD^2P^{-1}.$$
   Puisqu'elle est semblable à la matrice diagonale réelle D^2,
   <u>la matrice B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.</u>

Partie II

1. (a) Comme composée de deux éléments de SO $\left(\mathbb{R}^3\right)$, f^2 est une isométrie positive.
Le vecteur $\overrightarrow{e_3}$ est invariant par f, donc par f^2.
Pour $i \in \{1,2\}$, le vecteur $\overrightarrow{e_i}$ est orthogonal à l'axe, donc :

$$f\left(\overrightarrow{e_i}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_i}$$

soit $f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{e_2}$ et $f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = -\overrightarrow{e_1}$, puis $f^2\left(\overrightarrow{e_i}\right) = -\overrightarrow{e_i}$.
On peut conclure que

$$\underline{\text{l'application } f^2 \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Vect}\left(\overrightarrow{e_3}\right).}$$

Peut-être plus simplement fallait-il dire que la composée de deux rotations de même axe est encore une rotation de même axe, et que les angles s'ajoutent ? On reconnaît à nouveau un demi-tour. Quoi qu'il en soit, le principe des calculs sera utile pour la question 2.

(b) D'après les calculs précédents :

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Le polynôme caractéristique de C est

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}).$$

Il n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc

$$\underline{\text{la matrice } C \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$$

Puisqu'elle admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$,

$$\underline{\text{la matrice } C \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$$

Puisque $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonale réelle,

$$\underline{\text{la matrice } C^2 \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \text{ (donc dans } \mathbb{C}).}$$

2. (a) On peut prendre :

$$\boxed{\overrightarrow{w} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,-4)}$$

ou son opposé.
Le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)}$$

est clairement unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{w}$.
Il suffit de compléter avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}$ soit :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(2,2,1).}$$

(b) Par un raisonnement analogue à celui de la question 1., la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.}$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$P = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice orthogonale a pour inverse sa transposée, et $M_{\mathcal{B}} = PM_{\mathcal{B}'}P^{-1}$. Après calculs :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 1+12\sqrt{2} & -4+3\sqrt{2} \\ 1-12\sqrt{2} & 1 & -4-3\sqrt{2} \\ -4-3\sqrt{2} & -4+3\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix}.}$$

La matrice $M_{\mathcal{B}}$ est semblable à $M_{\mathcal{B}'} = C$ donc d'après la question 1 :

<u>la matrice $M_{\mathcal{B}}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.</u>

De même $M_{\mathcal{B}}^2$ est semblable à C^2 donc

<u>la matrice $M_{\mathcal{B}}^2$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.</u>

Partie III

1. Si $x \in \operatorname{Im}(g)$, il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Comme $f \circ g = 0$, on en déduit :

$$f(x) = f \circ g(y) = 0$$

c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
On a donc établi :

$$\boxed{f \circ g = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f).}$$

2. (a) On calcule :

$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = f^2 - (\alpha+\beta) f + \alpha\beta Id_E$$

et de manière symétrique :

$$(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = f^2 - (\beta+\alpha) f + \beta\alpha Id_E$$

donc

$$\boxed{\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad (f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E).}$$

(b) Il en résulte que les endomorphismes $g_i = f - \lambda_i Id_E$ $(1 \leq i \leq p)$ commutent deux à deux, donc si v est un vecteur propre pour la valeur propre λ_j :

$$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_{j-1} \circ g_{j+1} \circ \cdots \circ g_p \circ g_j(v) = 0$$

car $g_j(v_j) = 0$.

<u>Pour tout vecteur propre v de f, on a : $(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = 0$.</u>

(c) Puisque f est diagonalisable, il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E (où $n = \dim E$) constituée de vecteurs propres de f. Il existe donc des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Par linéarité de l'endomorphisme $g = (f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)$, on a $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(v_i)$. Mais la question précédente a établi que $g(v_i) = 0$ donc $g(x) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in E, \quad (f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(x) = 0.}$$

3. (a) On calcule :

$$a(f - \alpha Id_E) + b(f - \beta Id_E) = (a + b) f - (\alpha a + \beta b) Id_E$$

donc il suffit de trouver a et b réels tels que $a + b = 0$ et $\alpha a + \beta b = -1$. Comme $\alpha - \beta \neq 0$ par hypothèse, on prend :

$$\boxed{a = \frac{1}{\beta - \alpha} \text{ et } b = \frac{1}{\alpha - \beta}.}$$

(b) Il en résulte que tout $x \in E$ peut s'écrire $x = y + z$ avec $y = a(f - \alpha Id_E)(x) \in \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E)$ et $z = b(f - \beta Id_E)(x) \in \operatorname{Im}(f - \beta Id_E)$ donc

$$E \subset \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E).$$

L'inclusion contraire étant évidente, on peut conclure que :

$$\boxed{E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E).}$$

(c) En appliquant le résultat de la question 1 dans laquelle f est remplacé par $f - \alpha Id_E$ et g par $f - \beta Id_E$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E).}$$

D'après la question 2.(a), on a aussi $(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0$ donc de même :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E).}$$

(d) Il résulte des deux questions précédentes que :

$$E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E) + \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) \subset E$$

donc

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E).}$$

(e) Il reste à établir que $\operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$ sont en somme directe.
Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) \cap \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$. Alors $f(x) = \alpha x$ et $f(x) = \beta x$ donc $(\alpha - \beta) x = 0$ puis $x = 0$ car $\alpha \neq \beta$.

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E).}$$

(f) On en déduit que la concaténation d'une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E)$ et d'une base $\mathcal{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$ forme une base $\mathcal{B}$ de E. Mais les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ (respectivement $\mathcal{B}_2$) sont vecteurs propres de f pour la valeur propre α (resp. β). Ainsi il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f, donc

<u>l'endomorphisme f est diagonalisable.</u>

En toute rigueur, le raisonnement précédent suppose l'existence des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, ce qui n'est pas le cas si l'un des deux sous-espaces est réduit au vecteur nul.
Mais si par exemple $\operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) = \{0\}$, l'endomorphisme $f - \alpha Id_E$ est injectif, donc inversible, car E est de dimension finie. Il résulte alors de $(\star)$ que $f - \beta Id_E = 0$, et f est bien diagonalisable, puisqu'il s'agit d'une homothétie.

4. (a) Il s'agit de montrer que si $x \in F_k$, alors $f(x) \in F_k$. Or, si $x \in F_k$, alors $f^2(x) = \lambda_k x$ donc

$$f^2(f(x)) = f\left(f^2(x)\right) = f(\lambda_k x) = \lambda_k f(x)$$

ce qui établit le résultat.

$\underline{\text{Pour tout } k \in \{1, \ldots, p\},\ F_k \text{ est stable par } f.}$

(b) On a :

$$(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = f_k^2 - \lambda_k Id_{F_k}$$

et si $x \in F_k$, alors $f_k^2(x) = f^2(x) = \lambda_k x$ donc $(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k})(x) = 0$.
Ceci prouve que

$$\boxed{(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0}$$

où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de F_k.

(c) L'endomorphisme f_k de F_k vérifie donc une relation du type $(\star)$ avec $\alpha = -\mu_k$ et $\beta = \mu_k$ distincts car λ_k n'est pas nul par hypothèse. Par application de la question 3.(f), on en déduit que

$\underline{\text{l'endomorphisme } f_k \text{ est diagonalisable.}}$

(d) Toujours par application de la question 3., cette fois en utilisant le (e), on peut écrire que $F_k = F_k^+ \oplus F_k^-$.
Mais par hypothèse f^2 est diagonalisable, donc $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
On en déduit bien que

$$\boxed{E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.}$$

La concaténation des bases de ces différents sous-espaces (lorsqu'ils ne sont pas réduits au vecteur nul) forme une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, donc

$\underline{\text{l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice de Probabilités

1. Si le nombre de boules est inférieur ou égal au nombre de cases, deux configurations extrêmes sont possibles : une seule case est non vide, et elle contient les n boules, ou les n boules sont tombées dans des cases différentes, donc il y a n cases non vides, et il ne peut y en avoir davantage. Toutes les configurations intermédiaires sont possibles.

$$\boxed{\text{Si } n \leq N, \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

Si le nombre de boules est strictement supérieur au nombre de cases, les deux configurations extrêmes sont : une seule case contient toutes les boules, ou toutes les cases contiennent au moins une boule (ce qui est possible puisque $n > N$).

$$\boxed{\text{Si } n > N, \text{ alors } T_n(\Omega) = [\![1, N]\!].}$$

2. Cas $n = 1$.
Ici, $N \geq n$ et $T_1(\Omega) = \{1\}$. Il est certain qu'il y aura exactement une case contenant l'unique boule, donc $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$ On en déduit que $\mathbb{E}[T_1] = 1\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$.

$$\boxed{T_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1\,;\ \mathbb{E}[T_1] = 1.}$$

Cas $n = 2$.
Si $N = 1$, alors les deux boules tombent dans l'unique urne, donc $T_2(\Omega) = \{1\}$, $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 1$ et $\mathbb{E}[T_2] = 1$.

Si $N \geq 2$, alors $T_2(\Omega) = \{1,2\}$. La variable aléatoire $U = T_2 - 1$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1)$. Mais $\{T_2 = 1\}$ est réalisé si l'un des événements (incompatibles) $C_{1,i} \cap C_{2,i}$ est réalisé ($1 \leq i \leq N$), où $C_{1,i}$ (respectivement $C_{2,i}$) est l'événement : « la première (resp. deuxième) boule tombe dans la case numéro i ». Par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{1,i} \cap C_{2,i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{i,1}) \, \mathbb{P}(C_{i,2}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$$

donc $p = 1 - \dfrac{1}{N} = \dfrac{N-1}{N}$. On sait que $\mathbb{E}[U] = p$ et $\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[U] + 1$ donc $\mathbb{E}[T_2] = \dfrac{2N-1}{N}$.
On note que les cas $N = 1$ et $N \geq 2$ diffèrent par la valeur de $T_2(\Omega)$, mais dans les deux cas il est possible d'écrire :

$$\boxed{T_2(\Omega) \subset \{1,2\}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}, \quad \mathbb{E}[T_2] = \frac{2N-1}{N}\ .}$$

3. En notant $C_{k,j}$ l'événement « la j-ème boule tombe dans la case numéro k », on a de manière analogue à un calcul précédent :

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{1,i} \cap \ldots \cap C_{n,i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(C_{i,1}) \ldots \mathbb{P}(C_{i,n}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{n}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}.}$$

Si $N = 1$, l'événement $\{T_n = 2\}$ est impossible, donc de probabilité nulle.

Si $N \geq 2$, l'événement $\{T_n = 2\}$ est réalisé si l'un des $\dbinom{N}{2}$ événements incompatibles $K_{i,d} \cap K_{j,n-d}$ est réalisé, où $K_{r,d}$ est l'événement « r boules sont tombés dans la case numéro r » (avec $1 \leq i \neq j \leq N$ et $1 \leq d \leq n-1$). Il y a $\dbinom{n}{d}$ choix possibles pour les numéros de lancer mettant une boule dans la case i, les autres boules lancées allant dans la case j. Par incompatibilité et indépendance,

$$\mathbb{P}(K_{i,d} \cap K_{j,n-d}) = \sum_{d=1}^{n-1} \binom{n}{d} \left(\frac{1}{N}\right)^{n} = \frac{1}{N^n} \left(\sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} - 2 \right) = \frac{2^n - 2}{N^n}$$

et finalement $\mathbb{P}(T_n = 2) = \dbinom{N}{2} \dfrac{2^n - 2}{N^n}$.
En conclusion

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}}$$

avec la convention $\dbinom{N}{2} = 0$ si $N = 1$.
Si $N < n$, l'évément $\{T_n = n\}$ est impossible, donc de probabilité nulle.
Supposons $N \geq n$. Pour qu'au n-ième lancer n cases soient non vides, il faut qu'au lancer précédent $n-1$ cases soient non vides et que le dernier lancer atteigne une case vide. Dans cette configuration, il y a $N - (n-1)$ cases vides lors du n-ième lancer, donc, les cases pouvant être atteintes de manière équiprobable et par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N + 1 - n}{N} \mathbb{P}(T_{n-1} = n - 1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \frac{(N+1-n)(N-(n-1))\dots(N-1)}{N^{n-1}}\mathbb{P}(T_1 = 1)\\ &= \frac{N(N-1)\dots(N-(n-1))}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!}\frac{1}{N^n}.\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{P(T_n = n) = \binom{N}{n}\frac{n!}{N^n}}$$

avec la convention $\binom{N}{n} = 0$ si $n > N$.

4. Les $\{T_n = i\}$, pour $1 \leq i \leq \min(n, N)$ forment un système complet d'événements car $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]$ d'après la question 1.
On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{\min(n,N)} \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i)\,\mathbb{P}(T_n = i).$$

Mais pour $i > k$ l'on a $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = i) = 0$ car le nombre de cases non vides ne peut pas diminuer avec un lancer supplémentaire.
On a aussi $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = i) = 0$ si $i < k-1$ car le nombre de case non vides ne peut évoluer qu'au plus de 1 avec un lancer supplémentaire.
On a donc :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k)\,\mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k-1)\,\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

Or $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k)$ est la probabilité que le nombre de cases non vides n'ait pas évolué, c'est-à-dire que la dernière boule lancée arrive dans l'une des k cases non vides parmi les N disponibles.
Par équiprobabilité : $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k) = \dfrac{k}{N}$.
De même, $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k-1)$ est la probabilité que la dernière boule lancée arrive dans l'une des $N-(k-1)$ cases encore vides, donc $\mathbb{P}(T_{n+1} = k|T_n = k-1) = \dfrac{N-(k-1)}{N}$.
On a bien établi que : :

$$\boxed{\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1).}$$

5. (a) Par définition, puisque $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{G_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\,x^k}$$

la somme devant être limitée aux valeurs prises par T_n, qui sont ici en nombre fini d'après la question 1. Cette série entière est donc en fait une fonction polynomiale, donc

$\underline{\text{la fonction } G_n \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

(b) Notamment la fonction G_n est dérivable en $x = 1$ et

$$\boxed{\mathbb{E}[T_n] = G_n'(1).}$$

(c) On utilisera toujours une somme infinie pour l'expression de G_n, pour ne pas avoir à distinguer si $n \leq N$ ou non.

D'après la relation $(\star\star)$, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
NG_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^k + N\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k-1)\, x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)\,\mathbb{P}(T_n = k-1)\, x^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^k + N\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k-1)\, x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\,\mathbb{P}(T_n = k-1)\, x^k
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
NG_{n+1}(x) &= x\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^{k-1} + Nx\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k - x^2\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)\, x^{k-1} \\
&= xG_n'(x) + NxG_n(x) - x^2G_n'(x)
\end{aligned}$$

ce qui conduit bien à :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + xG_n(x).}$$

(d) Par dérivation de la relation précédente, pour tout x réel :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)\, G_n'(x) + \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x).$$

En prenant $x = 1$, sachant que $G_n(1) = 1$, on obtient :

$$G_{n+1}'(1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) G_n'(1) + 1$$

donc, d'après le (b) :

$$\boxed{\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}[T_n] + 1.}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique, le nombre $\ell = N$ vérifiant

$$\ell = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\ell + 1$$

et la suite de terme général $\mathbb{E}(T_n) - \ell$ est géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{N}$ et de premier terme $\mathbb{E}(T_1) - \ell = 1 - N$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(T_n) - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}(1 - N) = -N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

6. (a) La fonction indicatrice $\mathbb{I}_{\{X_i = k\}}$ vaut 1 si la i-ème boule arrive dans la case numéro k et 0 sinon. On a alors

$$\boxed{Y_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i = k\}}.}$$

(b) Les variables aléatoires $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$ sont indépendantes (car les lancers sont indépendants) et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{N}$ (probabilité qu'une boule arrive dans l'urne k). On en déduit que Y_k suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{N}$:

$$\boxed{Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{N}\right).}$$

Autrement dit, si l'on appelle « succès » le fait qu'une boule arrive dans l'urne numéro k, la variable Y_k compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernouilli indépendantes de même paramètre $\dfrac{1}{N}$.

La variable Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(Y_k \geq 1)$ avec

$$1 - p = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{N}\right)^0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-0} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

(c) L'événement $\{Z_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{Z_N = 0\}$ est impossible, car toutes les cases ne peuvent être vides à l'issue des lancers, donc

$$\mathbb{P}(\{Z_1 = 0\} \cap \ldots \cap \{Z_N = 0\}) = 0 \neq \mathbb{P}(Z_1 = 0) \times \ldots \times \mathbb{P}(Z_N = 0)$$

d'où l'on déduit que

$$\underline{\text{les variables aléatoires } Z_k \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes.}}$$

(d) Puisque T_n compte le nombre de cases non vides :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{N} Z_k.}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[Z_k] = \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

ce qui redonne bien :

$$\boxed{\mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$