Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Préambule

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, dont la dérivée f' est strictement croissante. x_0 désigne un réel de I.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.
2. En déduire, pour tout réel x de I distinct de x_0, l'existence d'un réel c_{x,x_0} de I tel que :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'\left(c_{x,x_0}\right)$$
3. On se place, dans cette question, dans le cas où $x < x_0$. Montrer que :
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\, f'(x_0) > 0$$
4. On se place, dans cette question, dans le cas où $x > x_0$. Montrer que :
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\, f'(x_0) > 0$$
5. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.
6. Que peut-on déduire des résultats précédents pour la représentation graphique de la fonction f ?

Partie I

On rappelle que l'intégrale de Gauss, qui est une intégrale convergente, donnée par $I_{\mathcal{G}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$, a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geq 0$, associe : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^x\, dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.
2. Que vaut $G(0)$?
3. Que vaut $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$?
4. (a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0, A]$:
$$|e^{-t}\, t^x| \leq (1 + t^A)\, e^{-t}$$

(b) Montrer que G est continue sur $[0, A]$.

(c) Montrer que G est de classe C^∞ sur $[0, A]$.

(d) En déduire que la fonction G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer, pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq 0$, $G^{(n)}(x)$ **sous la forme d'une intégrale**.

5. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$: $G(x+1) = (x+1)\, G(x)$.

6. Calculer, pour tout entier naturel n : $G(n)$.

7. Pour tout $x > -1$, on pose $\tilde{G}(x) = \dfrac{G(x+1)}{x+1}$. Montrer que $\tilde{G}$ prolonge G à l'intervalle $]-1, +\infty[$, et que ce prolongement est de classe C^∞ sur cet intervalle.

8. Montrer qu'au voisinage de -1^+, $\tilde{G}(x) \sim \dfrac{1}{x+1}$.

9. Exprimer, pour tout réel $x > -1$, $\tilde{G}''(x)$ à l'aide de x, $G(x+1)$, $G'(x+1)$ et $G''(x+1)$. En déduire une expression de $(x+1)^3\, \tilde{G}''(x)$ sous la forme d'une seule intégrale.

10. Etudier le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\tilde{G}''(x) > 0$ pour tout réel $x > -1$.

11. En s'appuyant sur le préambule, que peut-on en déduire concernant le graphe $\Gamma_{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}$?

12. En comparant $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$, montrer l'existence d'un réel c de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que la courbe représentative de la fonction $\tilde{G}$ admette, au point d'abscise c, une tangente horizontale.

13. En déduire le signe de $\tilde{G}'$, et dresser le tableau de variations de $\tilde{G}$ sur $]-1, +\infty[$ (on précisera la valeur de $\lim\limits_{x \to -1^+} \tilde{G}(x)$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{G}(x)$).

14. Tracer l'allure du graphe $\Gamma_{\tilde{G}}$ de la fonction $\tilde{G}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie. On donne : $c \simeq 0,46$ et $\tilde{G}(c) \simeq 0,89$

Partie II

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geq 0$.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire le développement en série entière de F.
7. Etudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n\, 4^n\, n\,!}{(2\,n+1)\,!}$$

8. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe

$$\int_0^x e^{t^2}\, dt$$

puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

La partie I étudie des propriétés de la fonction Gamma d'Euler, qui est, notamment, très utilisée en traitement du signal, par l'intermédiaire des lois de probabilité appelées loi Gamma. Ces lois sont aussi utilisées en ingénierie, pour l'analyse de la fiabilité des systèmes.

La partie II s'intéresse à un développement en série entière, mêlant équations différentielles, suites récurrentes, séries.