PT 2016

Epreuve C Mathématiques

Partie I

1. On suppose ici $b^2 - 4c > 0$.

   (a)
$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$
$$r_1 + r_2 = -b \qquad r_1 r_2 = c$$

   (b) Soit $f_i : t \mapsto e^{r_i t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $i = 1, 2$.

   f_i est deux fois dérivable et

$$\begin{aligned} f_i''(t) + bf_i'(t) + cf_i(t) &= (r_i^2 + br_i + c)e^{r_i t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   car r_i solution de $r^2 + br + c = 0$.

   Ainsi f_i, pour $i = 1, 2$, est bien solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Soit y une solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$. on a

$$\begin{aligned} (y' - r_1 y)' - r_2(y' - r_1 y) &= y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_1 r_2 y \\ &\quad \text{en utilisant I.1.(a)} \\ &= y'' + by' + cy \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Finalement, si y est une solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$ alors

$$(y' - r_1 y) - r_2(y' - r_1 y) = 0$$

   (d) Soit y une solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$, de la question précédente, on en déduit que $(y' - r_1 y)$ est solution de $z' - r_2 z = 0$ sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, il existe C_2 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (y' - r_1 y)(t) = C_2 e^{r_2 t}$$

   De manière analogue, on montre que $(y' - r_2 y)$ est solution de $z' - r_1 z = 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc qu'il existe C_1 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (y' - r_2 y)(t) = C_1 e^{r_1 t}$$

   Finalement pour toute solution y de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$, il existe C_1 et C_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - r_2 y(t) = C_1 e^{r_1 t} \qquad y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t}$$

(e) On prenant les expressions de la question précédente, on a pour y solution $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (y'(t) - r_1 y(t)) - (y'(t) - r_2 y(t)) = C_2 e^{r_2 t} - C_2 e^{r_1 t}$$

On a ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(r_2 - r_1)y(t) = C_2 e^{r_2 t} - C_2 e^{r_1 t}$.

Comme $r_2 - r_1 \neq 0$, on en déduit qu'il existe (λ, μ) des réels tels que y s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

On remarque que toute fonction y de la forme ci-dessus est solution de $(\mathcal{E}_H)$. Donc les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sont les fonctions de la forme précédente.

(f) i. Les solutions de $r^2 - 16 = 0$ sont $r_1 = 4$ et $r_2 = -4$.

Donc les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sont les fonctions :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{4t} + \mu e^{-4t}$$

où λ et μ sont des réels.

ii. Pour y solution de $(\mathcal{E}_H)$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = 4\lambda e^{4t} - 4\mu e^{-4t}$$

Les conditions initiales donnent alors le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2e \\ 4\lambda - 4\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = e$$

On vient de montrer que l'équation $(\mathcal{E}_H)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 2e$ et $y'(0) = 0$. Cette solution est la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{4t+1} + e^{-4t+1}$$

2. (a)

(b) Soit $(u, v) \in \Delta$ et $(x, y) = h(u, v)$, on a :

$$y^2 - 2x = -u^2 < 0$$

ainsi pour $(u, v) \in \Delta$, on a $h(u, v) \in D$.

Soit $(x, y) \in D$, résolvons

$$h(u, v) = (x, y) \iff \begin{cases} \dfrac{u^2 + v^2}{2} = x \\ v = y \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 = 2x - y^2 \\ v = y \end{cases}$$

Comme (x, y) est dans $\mathcal{D}$, on a : $2x - y^2 > 0$. Ainsi on peut donc trouver au moins un couple (u, v) solution.

Ce système admet une seule solution dans Δ puisqu'on cherche $u > 0$.

h est ainsi une application de Δ dans D tel que chaque élément (x, y) de D admet un unique antécédent $(u, v) = (\sqrt{2x - y^2}, y)$ dans Δ. Donc h est une bijection de Δ dans D et

$$\forall (x, y) \in D,\ h^{-1}(x, y) = (\sqrt{2x - y^2}, y)$$

Les applications partielles de h sont

$$h_1 : u \to \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right) \qquad h_2 : v \to \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$$

elles sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}$ et de dérivées continues (comme polynômes). Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ.

Les applications partielles de h^{-1} sont

$$x \to \left(\sqrt{2x-y^2}, y)\right) \qquad v \to \left(\sqrt{2x-y^2}, y)v\right)$$

elles sont dérivables respectivement sur $\{x \in \mathbb{R} | 2x - y^2 > 0\}$ et $\mathbb{R}$ et de dérivées continues (comme polynômes). Donc h^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

> On a donc bien montré que h est une bijection de Δ dans D de classe $\mathcal{C}^1$ et donc la réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Explicitons la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$ à l'aide des dérivées partielles de φ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial h_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{u^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u\left(\frac{\partial h_1}{\partial u} \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial h_2}{\partial u} \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

> On a donc bien montré que φ est solution de (E) sur D si, et seulement si, ψ est solution de (E') sur Δ.

(d)
> De la question I.1, on sait que les solutions de (E') sont les fonctions :
>
> $$\psi(u,v) = C_1(v)e^{4u} + C_2(v)e^{-4u}$$
>
> où C_1 et C_2 sont des applications définies, dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$.

Partie II

1. λ et μ sont des réels avec $\mu \neq 0$ et $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2\lambda x + \mu &= (x+\lambda)^2 + \mu - \lambda^2 \\ &= (\mu - \lambda^2)\left[1 + \frac{1}{\mu - \lambda^2}(x+\lambda)^2\right] \end{aligned}$$

> On peut ainsi écrire $x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha(1 + \beta(x+\lambda)^2)$ avec
>
> $$\alpha = \mu - \lambda^2 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{\mu - \lambda^2}$$

2. Le discriminant de $x^2 + 2\lambda x + \mu$ est $4(\lambda^2 - \mu) < 0$, donc $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus :

   * $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n+2}}$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}}$ converge $(2n+2>1)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ;

* $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n+2}}$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n+2}}$ converge $(2n+2>1)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On a, en utilisant la question II.1., pour $a<b$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\lambda x+\mu} = \frac{1}{\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+\beta(x+\lambda)^2}$$

Or $\beta = \dfrac{1}{\mu-\lambda^2} > 0$ ainsi

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\lambda x+\mu} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\sqrt{b}(x+\lambda\right)\right]_a^b$$

On a $I_0 = \displaystyle\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\lambda x+\mu}$, comme

* $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} \arctan(\sqrt{\beta}(a+\lambda)) = -\frac{\pi}{2}$;
* $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \arctan(\sqrt{\beta}(b+\lambda)) = +\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $I_0 = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\pi$.

Finalement on a démontré que I_n est une intégrale convergente pour tout entier naturel n, et $I_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu-\lambda^2}}$.

3. On a $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

   (a) Pour n entier naturel non nul, $I_{n-1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

   Pour $a<b$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_a^b + 2n\int_a^b \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} &= \frac{b}{(1+b^2)^n} - \frac{a}{(1+a^2)^n} + 2n\int_a^b \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
(1-2n)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} &= \frac{b}{(1+b^2)^n} - \frac{a}{(1+a^2)^n} - 2n\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}
\end{aligned}$$

   Il reste à calculer les limites :

   * $\displaystyle\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = I_{n-1}$;
   * $\displaystyle\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = I_n$;

* $\lim\limits_{a \to -\infty} \dfrac{a}{(1+a^2)^n} = 0\,;$

* $\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{b}{(1+b^2)^n} = 0.$

On obtient alors la relation pour tout entier n non nul :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

(b) I_n étant l'intégrale d'une fonction continue strictement positive, I_n est non nul pour tout entier naturel n.

A l'aide de la relation précédente, on peut écrire pour tout entier n non nul :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} I_k &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} I_{k-1} \\ \left(\prod_{k=1}^{n-1} I_k\right) I_n &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} I_k\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} I_0 \\ I_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} I_0 \end{aligned}$$

On peut alors faire la transformation :

$$I_n = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} I_0 = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n} k}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)\right)^2} I_0$$

Finalement pour tout entier naturel n,

$$I_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} I_0$$

Avec la question II.2. on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi$$

Partie III

1. Le discriminant de $y^2 - y + x$ est $1 - 4x$, comme $|x| \leqslant 1/4$, ce discriminant est positif et les deux solutions de $y^2 - y + x = 0$ sont

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

2. La fonction f est définie sur $\mathcal{L}_y =]-\infty, -1/4]$.

3. Pour tout réel α,

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

4. De la question précédente, pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$, on a :

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) x^k$$

On peut alors en déduire le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_S =]-1/4, 1/4[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ avec

$$S_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^n 4^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - i\right)$$

5. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

La série produit de Cauchy de ces deux séries est la série entière $\sum c_n x^n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Le rayon de convergence de la série produit R est supérieur à $\inf(R_a, R_b)$.

6. On utilisera la question III.1 (plutôt que la II.1 !).

Pour tout $x \in \mathcal{D}_S$, $f^2(x) + x = f(x)$. On a le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_S$. Par produit de Cauchy, on a celui de f^2 et donc de $g(x) = f^2(x) + x$ sur au moins $\mathcal{D}_S$:

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} S_k S_{n-k} \right) x^n + x$$

Par unicité du développement en série entière, on peut en déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} S_k S_{n-k}$$

On sait aussi que $S_0 = 0$ donc pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k}$.

7. On a en utilisant la question III.4, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
S_n &= -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n 4^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n 4^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1-2i}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n 4^n}{n!}\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2^n}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2^n}{n!}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}
\end{aligned}$$

On a donc bien pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

8. Pour $n \geqslant 2$, la combinaison $\dbinom{2n-2}{n-1}$ est un entier supérieur à 1. Donc pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

La série harmonique diverge donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général S_n diverge.

9. (a) $C_1 = 1$; $C_2 = 2$.

Pour $n = 3$, les mots de Dyck de longueur 6 sont

$$AAABBB; AABABB; AABBAB; ABAABB; ABABAB$$

et donc $C_3 = 5$.

(b) On va faire ce dénombrement en deux temps :

* nombre de mots M de Dyck de longueur $2n$ et tel que pour tout $h \in [\![1, n-1]\!]$, le mot M tronqué à sa longueur $2h$ ne contienne jamais autant de A que de B. Ce mot commence nécessairement par un A, fini par un B et entre ces deux lettres se trouve un mot de Dyck de longueur $2(n-1)$. Il y a donc C_{n-1} mots de Dyck de cette forme ;

* nombre de mots M de Dyck de longueur $2n$ et tel que pour $k \in [\![1, n-1[\![$ le mot M tronqué à la longueur $2k$ contienne autant de A que de B et ce, pour la première fois (c'est-à-dire que toute troncature de M de longueur $2h$, $h < k$, ne contient jamais autant de A que de B). D'après le calcul précédent, il y a C_{k-1} possibilités de mots pour les $2k$ premières lettres ; la fin du mot est aussi un mot de Dyck contenant $2(n-k)$ lettres donc il y a pour cette fin C_{n-k} possibilités de mots. Finalement, il y a $C_{k-1}C_{n-k}$ mots de Dyck de la forme cherchée.

En conclusion, un mot de Dyck de longueur $2n$ est soit de la première forme, soit de la deuxième en faisant varier k de 1 à $n-1$ et donc, comme $C_0 = 1$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}C_{n-k} + C_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$$

(c) Par récurrence forte montrons que pour tout entier n, $C_n = S_{n+1}$:

* pour $n = 0$, $C_0 = 1$ et $S_1 = 1$ (en utilisant III.4) ;
* supposons que pour tout entier $h \leqslant n$, $C_h = S_{h+1}$. On a alors

$$C_{n+1} = \sum_{h=1}^{n+1} C_{h-1}C_{n+1-h}$$

Pour $h \in [\![1, n+1]\!]$, $h \leqslant n$ et $n+1-h \leqslant n$ d'où :

$$C_{n+1} = \sum_{h=1}^{n+1} S_h S_{n+2-h} = S_{n+2}$$

Donc pour tout entier n, $C_n = S_{n+1}$. Il y a donc $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ mots de Dyck de longueur $2n$.