Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème d'Algèbre linéaire

Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Dans tout le problème, nous identifierons un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$

Pour une matrice A de taille $m \times n$ quelconque, $(m, n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, on désigne par A^T sa transposée.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, leur produit scalaire s'écrit matriciellement $\langle u, v \rangle = u^T v$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Partie I

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Calculer $\langle Au, u \rangle$ en fonction de (x, y, z), puis en fonction de (x', y', z').
6. Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2$.
7. Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on pose $(u, v)_A = \langle Au, v \rangle$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

On considère toujours la matrice A de la partie précédente et on fixe $b \in \mathbb{R}^3$. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle u, b \rangle.$$

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction J_b ? Que vaut $J_b(0)$?
2. Calculer le gradient de la fonction J_b, puis sa matrice Hessienne.
3. En utilisant le résultat de la question 6 de la partie I, montrer que

$$J_b(u) \geq \frac{1}{2}\lambda \|u\|^2 - \|b\| \|u\|$$

où λ désigne la plus petite valeur propre de A.

4. En déduire que la fonction J_b est minorée et non majorée (on pourra étudier la fonction qui, à tout réel t, associe $\frac{\lambda}{2}t^2 - \alpha\, t$, pour une valeur de α bien choisie).

5. Montrer que : $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) \leq 0$.

6. Montrer que, si $\|u\| > \dfrac{2\,\|b\|}{\lambda}$, alors : $J_b(u) \geq 0$.

7. En déduire que : $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u \in \bar{B}(0,r)} J_b(u)$, où $\bar{B}(0,r)$ désigne la boule fermée de centre l'origine et de rayon $r = \frac{2\|b\|}{\lambda}$.

8. Montrer que la fonction J_b admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

9. Montrer que cette fonction atteint son minimum global au point $u = A^{-1}b$.

Partie III

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$, symétrique, et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^n$ sont dits A-conjugués si $\langle Au, v\rangle = 0$.

1. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de la matrice A, rangées dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que, pour tout $i \leq n$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.

   (b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la décomposition dans la base précédente s'écrit
   $$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$
   Exprimer en fonction des α_i les quantités $\|u\|^2$ et $\langle Au, u\rangle$.

   (c) Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\langle Au, u\rangle \geq \lambda_1 \|u\|^2$.

   (d) En déduire que pour tout vecteur u non nul, on a $\langle Au, u\rangle \neq 0$.

2. Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille de vecteurs non nuls A-conjugués deux à deux. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^n$.

3. Rappeler (sans justification) l'expression de $(\alpha M + \beta N)^T$ et $(MN)^T$ en fonction de M^T et N^T, où M, N sont des matrices de taille quelconque (mais telles que les opérations sont bien définies) et α, β sont des nombres réels.

4. Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (que l'on identifie avec une matrice colonne), préciser la taille des matrices $v^T v$ et $v\, v^T$ (on identifiera les matrices carrées de taille 1 et les nombres réels).

5. Montrer que pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^n$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a $\langle Bu, v\rangle = \langle u, B^T v\rangle$.

6. On définit pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ les matrices suivantes :

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i\, v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle} \quad , \quad D_k = I_n - C_k A$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

(a) Montrer que les matrices C_k sont symétriques pour $1 \leq k \leq n$.

(b) Montrer que, pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$, on a, pour $1 \leq k \leq n$,

$$C_k A w = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i.$$

(c) En déduire que pour $0 \leq j \leq k-1$, on a : $C_k A v_j = v_j$. (On rappelle que les v_i sont A-conjugués 2 à 2).

(d) En déduire que pour $0 \leq j \leq k-1 \leq n$: $D_k v_j = 0$ et $D_k^T A v_j = 0$.

(e) On a donc, pour tout $0 \leq j \leq n-1$, $D_n v_j = 0$. Pourquoi peut-on en déduire que $D_n = 0$? Que vaut alors C_n ?

Exercice de Probabilités

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$.

Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.

Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.

2. Déterminer la loi du couple (N, X).

3. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall\, x \in]-1,1[:\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$
Donner l'expression de la dérivée $k^{ième}$ de f pour tout $k \geq 0$.
En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.

4. En déduire que la loi de X est donnée par

$$\forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}\cdot$$

5. Soit $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.

   (a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).

   (c) Calculer la variance de Y.

6. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.